

范畴论

Tongren Xiao

2026 年 7 月

前言

这是我大三学年范畴论讨论班的讲义，主要参考 Emily Riehl 的 *Category Theory in Context*。这些笔记从若干次讨论、几份草稿和许多没有结论的夜晚中慢慢长出来。范畴论总要求我们把眼前的对象放进更大的关系里；可是在学习它的时候，人反而常常更清楚地感到自身的局限：有些图交换得过于安静，有些定义在写下之后才显出距离，而许多本以为已经理解的东西，隔天又要从头开始。

我把这里的材料重新整理，只希望留下讨论班中真正值得反复看的部分：范畴、函子、自然变换、等价，以及它们在若干熟悉例子中的影子。篇幅并不试图替代参考书；它更像一份在途中留下的记录。若它能使后来翻到这里的人少走一点弯路，或在某个卡住的下午提供一个可回看的起点，这些零散的整理便不算全无意义。

岭南
2026 年 7 月 18 日

Contents

前言	ii
Contents	iii
1 范畴与动机	1
1.1 动机	1
1.2 范畴, 函子, 自然变换	6
2 对偶与函子	17
2.1 对偶原理	17
2.2 特殊的对象和态射	17
2.3 函子	22
3 函子与自然变换	31
3.1 基本群函子与布劳威尔不动点定理	31
3.2 反变函子的补充说明与典型例子	32
3.3 函子的保持与反射性质	35
3.4 自然变换	41
4 范畴等价	48
4.1 范畴等价: 从严格同构到结构相同	48
4.2 全、忠实与本质满	48
4.3 等价判别准则	48
4.4 骨架与本质小	49
5 么半范畴与图	50
5.1 么半群	50
5.2 么半范畴	51
5.3 严格么半范畴与一致性定理	52
5.4 么半范畴的例子: 集合范畴	52
5.5 么半范畴中的么半群	54
5.6 图与交换图	56
5.7 初对象、终对象与零对象	56
5.8 具体范畴	58
5.9 图的交换性与可消去性	61
6 函子范畴	63
6.1 函子范畴与自然变换的垂直复合	63
6.2 自然变换的复合与函子范畴	65
6.3 中间四交换引理	68
6.4 2-范畴的严格定义	70
7 极限与余极限	72
7.1 锥、余锥与泛性质	72
7.2 可表性与极限	73
7.3 基本极限	76
7.4 余积、乘积与矩阵表示	81
8 集合范畴中的极限	84
8.1 拓扑范畴中的余极限	84
8.2 集合范畴中的极限	86

8.3	极限与余极限的保持、反射与创造	91
9	特殊函子与范畴等价	93
9.1	预备回顾与特殊函子	93
9.2	3.3 节	96
9.3	特殊函子的性质	98
10	site、层与函子范畴	104
10.1	site 与层	104
10.2	一些重要的命题	109
10.3	函子范畴里的结果	114
11	函子范畴中的极限	116
11.1	预备知识	116
11.2	函子范畴里的极限	116
11.3	极限、锥与同态函子	118
11.4	米田函子与极限	120
11.5	一些例子	122
11.6	定理 3.2.13 的推广	123
11.7	两个引理	125

1.1 动机

范畴论是上世纪 40 年代，由两位伟大的数学家：塞缪尔·艾伦伯格和桑德斯·麦克莱恩创立的。范畴论起源于代数拓扑。如果读者熟悉代数拓扑的话，这块内容并不困难。需要指出的是，我们尽量用现代的语言来描述相关的内容，而在必要的地方，提及两位数学家当年的思路。

1.1.1 Hom 函子

设 G 是一个交换群，它的群运算用加法表示。以 $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ 表示所有从 G 到整数 $\mathbb{Z}$ 的同态的集合。在这个集合上面，我们定义如下运算：对任意 $f, h \in \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$,

$$f + h : G \rightarrow \mathbb{Z} \quad g \mapsto (f + h)(g) := f(g) + h(g), \quad \forall g \in G$$

这显然是一个同态，因为对任意 $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} (f + h)(g_1 + g_2) &= f(g_1 + g_2) + h(g_1 + g_2) \\ &= f(g_1) + f(g_2) + h(g_1) + h(g_2) \\ &= (f + h)(g_1) + (f + h)(g_2). \end{aligned}$$

故 $f + h$ 也是从 G 到 $\mathbb{Z}$ 的同态 ($f + h \in \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$)。显然 $f + h = h + f$ ，这样， $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ 关于映射的加法成为一个交换群。

设 G 和 G' 都是交换群，根据上面的操作可以得到两个 abel 群：

$$A = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}), B = \text{Hom}(G', \mathbb{Z})$$

接下来，我们的目的是：利用阿贝尔群 G 和 G' 的群同态诱导 A 和 B 这两个“新阿贝尔群”的群同态。具体构造如下：设 $\varphi : G \rightarrow G'$ 是一个群同态，对任意 $h \in \text{Hom}(G', \mathbb{Z})$ ，定义如下映射：

$$\begin{aligned} \varphi_h : G &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\varphi_h)g &= h(\varphi(g)), \quad g \in G, \end{aligned}$$

相当于把 h 左乘到 φ 上。这个映射显然是同态，因为对任意 $g_1, g_2 \in G$ ：

$$\begin{aligned} (\varphi_h)(g_1 + g_2) &= h(\varphi(g_1 + g_2)) = h(\varphi(g_1) + \varphi(g_2)) \\ &= h(\varphi(g_1)) + h(\varphi(g_2)) \\ &= (\varphi_h)(g_1) + (\varphi_h)(g_2), \end{aligned}$$

因此 $\varphi_h \in \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ 。故 φ 可以诱导如下映射：

$$\begin{aligned} \varphi^t : \text{Hom}(G', \mathbb{Z}) &\rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Z}). \\ h &\mapsto \varphi_h \end{aligned}$$

这个映射是群同态吗？回答是肯定的：对任意 $h_1, h_2 \in \text{Hom}(G', \mathbb{Z})$ ，显然有

$$\varphi^t(h_1 + h_2) = \varphi^t(h_1) + \varphi^t(h_2),$$

因此 φ^t 也是群同态。这个诱导同态 φ^t 称作 φ 的转置，也叫做映射 φ 的共轭映射。

至此，我们做了这样一件事情。以 $\mathcal{G}$ 记交换群全体（注意，这不是一个集合），我们定义了一个“作用” $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ ，它把一个交换群变成“这个交换群到 $\mathbb{Z}$ 的所有同态构成的交换群”，把群同态变成“ Hom ”群之间的群同态：

$$\begin{aligned}\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z}) : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ G &\mapsto \text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})(G) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}). \\ \varphi : G &\rightarrow G' \mapsto \text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})(\varphi) = \varphi^t =: \text{Hom}(G', \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Z})\end{aligned}$$

在后面，这个作用我们称之为一个“反变函子”。具体地说， $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ 是群范畴 $\mathcal{G}$ 上的反变函子。

1.1.2 奇异上同调群

现在我们把这个函子作用于奇异（下）链群以及相应的边缘映射构成的链复形上，马上得到所谓的“奇异上链群”。具体操作如下。

设拓扑空间 X 的奇异下链复形为 $\{C_q(X), \partial_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ ，其中 $C_q(X) \in \mathcal{G}$ 是 q 维奇异下链群（自由交换群），态射 $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ 是下边缘算子（群同态），此时使用上述反变函子作用：

(1) 对每个 q ，将反变函子 $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ 作用于下链群 $C_q(X)$ ，得到 q 维奇异上链群：

$$C^q(X) = \text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})(C_q(X)) = \text{Hom}(C_q(X), \mathbb{Z});$$

(2) 将反变函子 $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ 作用于下边缘算子 $\partial_{q+1} : C_{q+1}(X) \rightarrow C_q(X)$ ，得到上边缘算子（即 ∂_{q+1} 的转置）：

$$\delta_q = \text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})(\partial_{q+1}) = \partial_{q+1}^t : C^q(X) \rightarrow C^{q+1}(X),$$

可以看到，现在边缘映射的方向反过来了，变成向上的了，这也是为什么这个奇异链群叫做“上链群”。

为了保证这是一个链复形，我们还需要验证这个边缘映射是二次作用变为 0 的，而这是显然的。

命题 1.1. 设 $C^*(X) = \{C^q(X), \delta_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 是拓扑空间 X 的奇异上链复形，其中 $\delta_q = \partial_{q+1}^t$ ($\partial_{q+1} : C_{q+1}(X) \rightarrow C_q(X)$ 为下边缘算子)，则上边缘算子族 $\{\delta_q\}$ 满足 $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$ ，即 $C^*(X)$ 是一个链复形。

证明. 记 $\delta_q = \partial_{q+1}^t$ ， $\delta_{q+1} = \partial_{q+2}^t$ ，显然有：

$$(\partial_{q+1} \circ \partial_{q+2})^t = \partial_{q+2}^t \circ \partial_{q+1}^t$$

又因为 $\partial_{q+1} \circ \partial_{q+2} = 0$ ，其转置当然还是 0，因此

$$\partial_{q+2}^t \circ \partial_{q+1}^t = 0$$

□

由此， $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ 作用于奇异下链复形后，诱导出奇异上链复形 $\{C^q(X), \delta_q^t\}_{q \in \mathbb{Z}}$ ：

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}^t} C^q(X) \xrightarrow{\partial_{q+2}^t} C^{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+3}^t} \cdots$$

注 1.2. 奇异下链群当然是一个 abel 群，因此可以被 Hom 函子作用。事实上，奇异下链群是由奇异单形生成的自由 abel 群。

类似下调理论，定义

$$Z^q(X) = \ker\{\delta_q : C^q(X) \rightarrow C^{q+1}(X)\},$$

$$B^q(X) = \text{Im}\{\delta_{q-1} : C^{q-1}(X) \rightarrow C^q(X)\},$$

分别称为上闭链群和上边缘链群。定义 $B^0(X) = 0$ 。

由于 $\delta_q \circ \delta_{q-1} = 0$ ，自然有 $B^q(X) \subset Z^q(X)$ 。从而马上可以定义商群，即所谓的“奇异上同调群”。

定义 1.3 (奇异上同调群). $H^q(X) = Z^q(X)/B^q(X)$ 是拓扑空间 X 的 q 维奇异上同调群。

和下同调中一样，我们可以把上述定义里的 $\mathbb{Z}$ 换成一般的交换群 G （就是把 Hom 函子中的 $\mathbb{Z}$ 改为 G 即可），然后就可以得到一般系数下的上同调概念。我们直接给出相应的概念。

定义 1.4. 设 X 为拓扑空间， G 为交换群，定义 q 维奇异上链群为

$$C^q(X, G) = \text{Hom}(C_q(X, \mathbb{Z}), G)$$

其中 $C_q(X, \mathbb{Z})$ 是 X 的 q 维奇异下链群， $\text{Hom}(C_q(X, \mathbb{Z}), G)$ 是所有从 $C_q(X, \mathbb{Z})$ 到 G 的群同态的集合，关于映射加法构成交换群。

定义 1.5 (上边缘算子 (一般系数)). 设 $\partial_{q+1} : C_{q+1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_q(X, \mathbb{Z})$ 是奇异下链复形的 $(q+1)$ 维下边缘算子 (群同态)。定义 q 维上边缘算子 $\delta^q : C^q(X, G) \rightarrow C^{q+1}(X, G)$ 为 ∂_{q+1} 的转置映射 (即反变函子 $\text{Hom}(\cdot, G)$ 作用于 ∂_{q+1} 的诱导同态)，即：

$$\delta^q = \partial_{q+1}^t = \text{Hom}(\partial_{q+1}, G)$$

定义 1.6 (上闭链群与上边缘链群 (一般系数)). q 维上闭链群：

$$Z^q(X, G) = \ker(\delta^q : C^q(X, G) \rightarrow C^{q+1}(X, G))$$

q 维上边缘链群：

$$B^q(X, G) = \text{Im}(\delta^{q-1} : C^{q-1}(X, G) \rightarrow C^q(X, G)) \quad (\text{规定 } B^0(X, G) = 0)$$

定义 1.7 (奇异上同调群 (一般系数)). 以交换群 G 为系数的 q 维奇异上同调群定义为

$$H^q(X, G) = Z^q(X, G)/B^q(X, G)$$

1.1.3 Ext 函子

我们从一个引理出发。

引理 1.8. 如果 $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{j} A \rightarrow 0$ 是交换群的正合序列，则对任意交换群 G ，有如下正合序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, G) \xrightarrow{j^t} \text{Hom}(F_0, G) \xrightarrow{i^t} \text{Hom}(F_1, G).$$

证明我们略去。

特别的，当 F_1, F_0 都是自由 abel 群时，我们可以定义自然的商群 $\text{Ext}(A, G)$

定义 1.9. 我们定义如下商群：

$$\text{Ext}(A, G) = \text{Hom}(F_1, G)/\text{Im } i^t.$$

称 $\text{Ext}(A, G)$ 为正合序列 $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ 的导出函子。

注意, i^i 不一定是满射, 故 $\text{Ext}(A, G)$ 通常非平凡。

事实上, 在 abel 范畴里面, 我们可以严格定义一般的导出函子。而艾伦贝格最初定义 Ext 的时候, 是使用群扩张去定义的。当然, 在范畴论最初的那一篇论文里面, 艾伦贝格和我们一样, 使用了函子等概念去表述这个概念。

至此, 我们终于可以给出万有系数定理。

定理 1.10 (定理 5.2.4). 设 G 是一个交换群, 对于拓扑空间 X 有分裂正合序列

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(X, \mathbb{Z}), G) \xrightarrow{\beta} H^q(X, G) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_q(X, \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0.$$

进一步地, 我们有

$$H^q(X, G) \cong \text{Hom}(H_q(X, \mathbb{Z}), G) \oplus \text{Ext}(H_{q-1}(X, \mathbb{Z}), G).$$

后者由分裂保证的。

我们只证明一下后面这个性质。

命题 1.11. 设短正合序列 $0 \rightarrow C \xrightarrow{\lambda} D \xrightarrow{\mu} E \rightarrow 0$ 分裂 (即存在同态 $\eta : E \rightarrow D$ 使得 $\mu\eta = \text{id}_E$), 则 $D \cong C \oplus E$ (其中 $C \oplus E$ 表示 C 与 E 的直和)。

证明. 为证明 $D \cong C \oplus E$, 我们构造一对互逆的同态 $\varphi : C \oplus E \rightarrow D$ 与 $\psi : D \rightarrow C \oplus E$ 即可。

对任意 $(c, e) \in C \oplus E$, 定义映射:

$$\varphi(c, e) = \lambda(c) + \eta(e)$$

需验证 φ 是同态: 对任意 $(c_1, e_1), (c_2, e_2) \in C \oplus E$, 由 λ 和 η 的同态性:

$$\begin{aligned} \varphi((c_1, e_1) + (c_2, e_2)) &= \lambda(c_1 + c_2) + \eta(e_1 + e_2) \\ &= \lambda(c_1) + \lambda(c_2) + \eta(e_1) + \eta(e_2) \\ &= (\lambda(c_1) + \eta(e_1)) + (\lambda(c_2) + \eta(e_2)) \\ &= \varphi(c_1, e_1) + \varphi(c_2, e_2) \end{aligned}$$

故 φ 是同态。

对任意 $d \in D$, 结合短正合序列性质与分裂条件分析:

- ▶ 由正合性可知 $\ker \mu = \text{im} \lambda$, 且 $\mu(d) \in E$;
- ▶ 由分裂条件 $\mu\eta = \text{id}_E$, 计算得:

$$\mu(d - \eta\mu(d)) = \mu(d) - \mu\eta\mu(d) = \mu(d) - \text{id}_E \cdot \mu(d) = 0$$

- ▶ 因此 $d - \eta\mu(d) \in \ker \mu = \text{im} \lambda$, 即存在唯一的 $c \in C$ 使得 $\lambda(c) = d - \eta\mu(d)$ (唯一性由 λ 是单同态可得, 因短正合序列中 $\ker \lambda = 0$)。

定义映射:

$$\psi(d) = (c, \mu(d))$$

其中 $c \in C$ 是满足 $\lambda(c) = d - \eta\mu(d)$ 的唯一元素。

验证 ψ 是同态: 设 $d_1, d_2 \in D$, 记 $\psi(d_1) = (c_1, \mu(d_1))$, $\psi(d_2) = (c_2, \mu(d_2))$, 即 $\lambda(c_1) = d_1 - \eta\mu(d_1)$, $\lambda(c_2) = d_2 - \eta\mu(d_2)$ 。两式相加并利用 λ 的同态性:

$$\lambda(c_1 + c_2) = (d_1 + d_2) - \eta(\mu(d_1) + \mu(d_2)) = (d_1 + d_2) - \eta\mu(d_1 + d_2)$$

因此 $\psi(d_1 + d_2) = (c_1 + c_2, \mu(d_1 + d_2)) = (c_1, \mu(d_1)) + (c_2, \mu(d_2)) = \psi(d_1) + \psi(d_2)$, 故 ψ 是同态。

最后验证 φ 与 ψ 互逆即可。

- 对任意 $d \in D$ ，设 $\psi(d) = (c, \mu(d))$ ，则由 ψ 的定义有 $\lambda(c) = d - \eta\mu(d)$ 。代入 φ 的表达式：

$$\varphi\psi(d) = \varphi(c, \mu(d)) = \lambda(c) + \eta\mu(d) = (d - \eta\mu(d)) + \eta\mu(d) = d$$

故 $\varphi\psi = \text{id}_D$ 。

- 对任意 $(c, e) \in C \oplus E$ ，先计算 $\varphi(c, e) = \lambda(c) + \eta(e)$ 。代入 ψ 的表达式，需计算两部分：

- 第一分量：找 $c' \in C$ 使得 $\lambda(c') = \varphi(c, e) - \eta\mu(c, e)$ 。先计算 $\mu\varphi(c, e)$ ：

$$\mu\varphi(c, e) = \mu\lambda(c) + \mu\eta(e) = 0 + \text{id}_E(e) = e$$

因此 $\varphi(c, e) - \eta\mu\varphi(c, e) = \lambda(c) + \eta(e) - \eta(e) = \lambda(c)$ ，由 λ 是单同态，得 $c' = c$ 。

- 第二分量： $\mu\varphi(c, e) = e$ （已计算）。

故 $\psi\varphi(c, e) = (c, e)$ ，即 $\psi\varphi = \text{id}_{C \oplus E}$ 。

由于 φ 与 ψ 是互逆的同态，因此 φ 是同构，即 $D \cong C \oplus E$ 。 □

注 1.12. 上述定理中的下同调群（当然，得是 X 上的），系数群 G 都是任意的，而且拓扑空间 X 也是任意取定的。

事实上，在最开始，艾伦贝格证明的结论只有：

$$H^q(X, G) \cong \text{Hom}(H_q(X, \mathbb{Z}), G) \oplus \text{Ext}(H_{q-1}(X, \mathbb{Z}), G).$$

他首先利用自然变换的语言，说清楚了这个同构具有的“自然性”（两个交换图，包括与拓扑空间的连续函数诱导有关的，还有一个就是系数群）。同时在证明完后，艾伦贝格和我们刚才做的一样，用函子的语言，重新描述了一遍上述结果。他惊叹于范畴论所能囊括的数学对象之多。进一步的，基于范畴论的观点，艾伦贝格把上述定理轻松地推广到了更加一般的情况。

1.2 范畴，函子，自然变换

从学习的角度看，我们应该先学范畴，然后学函子和自然变换。但是如果回溯历史的话，范畴论的创始人真正关心的是自然变换——他们希望利用自然变换来刻画所谓的“自然性”。而为了定义自然变换，才有了所谓的函子和范畴。

1.2.1 范畴

我们直接给出范畴的定义：

定义 1.13 (范畴). 一个范畴 $\mathcal{C}$ 由以下数据组成：

1. 一个类 $Ob \mathcal{C}$ ，其元素 $A, B, C, \dots$ 称为 **对象**；
2. 对任意两个对象 A, B ，存在唯一一个集合 $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ，其元素称为从 A 到 B 的 **态射**。元素 $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ 将记为 $f : A \rightarrow B$ ； A 和 B 分别称为 f 的 *Domain* 和 *Codomain*；
3. 对任意三个对象 A, B, C ，有一个 **合成律**

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f;$$

4. 对于每个对象 A ，存在一个态射 $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ ，称为 A 上的 **恒等元**

上述 *data* 使得以下公理成立：

- (i) **结合律**：给定态射 $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ， $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ ， $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ ，以下等式成立：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

- (ii) **恒等律**：给定态射 $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ，以下恒等式成立：

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A.$$

我们有必要对上述的定义做一些声明和补充：

注 1.14. 可以看到，在范畴定义中，我们只要求对象的全体是一个“类”，而不一定要为集合。这里的类的严格定义，涉及 ZBG 公理化体系，我们在这里不想探讨。读者们只需要把它视为“一堆东西的全体。比如说，集合的全体，它就不构成一个集合（罗素悖论），而是一个类。类包括了集合，以及比集合还“大”的真类。

另外，我们要求态射集得是一个集合。当然，有些书它允许 $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为一个类（如。。），而把 $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为集合（对任意的 A, B 属于 $Ob(\mathcal{C})$ ）的范畴，称为**局部小的**。

注 1.15. 我们当然允许对象全体是一个集合。事实上，我们称对象全体构成一个集合的范畴为**小范畴**。很容易发现，一个范畴如果是小范畴，那么它一定是局部小的。这个的证明我们放在后面（因为它需要一点点的前置命题）。

还有一点很重要。态射集我们默认是无交的。事实上，我们一定可以把所有范畴的态射集改为无交的。操作如下：

在定义中，我们只要求了每个对象都对应一个单位态射，但并未指出这个态射的个数。事实上，这个单位态射是唯一的。

命题 1.16. 范畴 $\mathcal{C}$ 中，每个对象 $A \in Ob \mathcal{C}$ 的单位态射 1_A 是唯一的。

证明. 我们使用反证法。假设存在两个单位态射，即 1_A 和 $1'_A$ 均为对象 A 上的单位态射。

具体步骤**1. 定义新态射集:**

对原范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 构造新元素 $\tilde{f} = (A, f, B)$ 。

新的态射集合定义为:

$$\tilde{\text{Mor}}(\mathcal{C}) = \{(A, f, B) \mid A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\}$$

2. 定义域、陪域和复合运算:

- **域 (dom)**: 对 $\tilde{f} = (A, f, B)$, 定义 $\text{dom}(\tilde{f}) = A$ 。
- **陪域 (cod)**: 对 $\tilde{f} = (A, f, B)$, 定义 $\text{cod}(\tilde{f}) = B$ 。
- **复合 ($\circ$)**: 若 $\tilde{f} = (A, f, B)$, $\tilde{g} = (B, g, C)$, 则复合 $\tilde{g} \circ \tilde{f} = (A, g \circ f, C)$ (其中 $g \circ f$ 是原范畴的复合)。
- **单位态射**: 对对象 A , 单位态射 $\tilde{\text{id}}_A = (A, \text{id}_A, A)$ 。

验证无交性

假设存在 $\tilde{f} = (A, f, B)$ 和 $\tilde{g} = (A', g, B')$ 使得 $\tilde{f} = \tilde{g}$, 则由三元组的相等性可知 $A = A'$, $f = g$, $B = B'$, 即 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 必须属于同一 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 的改造集合。因此, 不同的 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 对应的 $\tilde{\text{Mor}}(\mathcal{C})$ 子集互不相交。

验证范畴公理

我们先把 1_A 视为单位态射, 令 $f = 1'_A$, 则由单位态射的性质可得:

$$1_A f = f \iff 1_A 1'_A = 1'_A$$

现在, 我们把 $1'_A$ 视为单位态射, 令 $f = 1_A$, 则同理可得:

$$f 1'_A = f \iff 1_A 1'_A = 1_A$$

因此, $1_A = 1'_A$ 。 □

注 1.17. 可以看到, 这个证明思路和群论里面证明“群的单位元的唯一性”是一模一样的。

从上述命题中, 我们可以得到一个推论:

推论 1.18. *The objects of a category are in bijective correspondence with the identity morphisms.*

证明. 证明是显然的。这里需要利用范畴态射集无交来保证单射。 □

推论中单位态射和对象的一一对应关系, 使得我们可以完全抛弃对象, 并从态射的角度这样理解一个/定义范畴:

定义 1.19 (范畴的另一种定义). 范畴是一个态射的类 (or 集合), 其中配备一个满足结合律的“部分定义”的运算。同时, 存在某些特殊态射, 它们在上述运算下面, 可以充当单位元。

由上面的分析可以看出, 在范畴论里面态射的重要性远远大于对象本身。这种“结构优先于个体”的哲学思想非常关键, 可以说是 20 世纪数学界的一个重大的转变。

验证范畴公理

- **结合律:** 若 $\tilde{f} = (A, f, B)$, $\tilde{g} = (B, g, C)$, $\tilde{h} = (C, h, D)$, 则

$$(\tilde{h} \circ \tilde{g}) \circ \tilde{f} = (A, h \circ (g \circ f), D), \quad \tilde{h} \circ (\tilde{g} \circ \tilde{f}) = (A, (h \circ g) \circ f, D)$$

由原范畴复合的结合律, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, 故结合律成立。

- **单位律:** 对 $\tilde{f} = (A, f, B)$, 有

$$\tilde{\text{id}}_B \circ \tilde{f} = (A, \text{id}_B \circ f, B) = (A, f, B) = \tilde{f}, \quad \tilde{f} \circ \tilde{\text{id}}_A = (A, f \circ \text{id}_A, B) = (A, f, B) = \tilde{f}$$

故单位律成立。

综上, 通过将每个态射编码为**三元组** (A, f, B) , 我们成功将任意范畴的态射集改造为无交集, 且保持了范畴的所有结构 (对象、复合、单位态射)。

当然, 在通常情况下, 我们仍然会指出这个范畴里的对象是什么, 并习惯用相应的对象去称呼这个范畴, 如“集合范畴”“拓扑范畴”(在后面会看到)等等。这和范畴论的哲学思想有一点点矛盾, 但是方便我们去判断这到底是什么范畴。

范畴的定义可能会令初学者感到困惑, 初学者不妨把范畴当做一种描述性的语言。事实上, 这和我们把 $(N, +)$ 称为一个环, 把 $(R, +)$ 称为一个域, 是完全一致的行为。在下面的诸多例子里, 我们可以看到: 许多我们熟知的数学对象, 都可以归为/描述为一种范畴 (用范畴去描述)。

例 1.20 (离散范畴 (C_X)). Any set X can be made into a small category, called the discrete category on X and denoted by C_X , as follows:

- $Ob(C_X) = X$
- for every $x, y \in X$,

$$Hom_{C_X}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } x \neq y, \\ \{1_x\} & \text{if } x = y, \end{cases}$$

where 1_x denotes the identity morphism of x .

在离散范畴里, 每个点都是“孤立的”(因为任意两个不同的点之间, 都不存在态射)。这也是为什么这个范畴称为离散范畴。

离散范畴“态射稀少”的特点, 导致它的复合非常简单。事实上若存在态射 $f \in Hom_{C_X}(a, b)$ 和 $g \in Hom_{C_X}(b, c)$, 则必须 $a = b$ 且 $b = c$ (否则对应的态射集为空集), 因此 $a = b = c$, 从而 $f = 1_a$ 且 $g = 1_a$, 其态射复合只能为:

$$g \circ f = 1_a \circ 1_a = 1_a \in Hom_{C_X}(a, a)$$

离散范畴当然是局部小范畴。

例 1.21 (集合范畴(Set)). Set has sets as its objects and functions (with specified domain and codomain⁵) as its morphisms. Morphism composition is function composition, and identity morphisms are identity functions.

这个范畴当然不是小范畴 (罗素悖论)。但局部小是满足的。事实上, 从 A 到 B 的函数 f 是下述笛卡尔积:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

的子集, 且满足“单值性”: 对每个 $a \in A$, 存在唯一的 $b \in B$ 使得 $(a, b) \in f$ 。因此, $Hom_{Set}(A, B)$ 是集合。

集合范畴是一个很直观的范畴。但是它对初学者有一个巨大的误导性：似乎态射都是一种映射。事实上，态射可以是很随意的东西，这个东西可以极其抽象，只要它可以满足范畴的两个公理且可以合理地定义出复合运算。相关的例子我们在后面会给出。

更一般的，我们可以得到关系范畴：

例 1.22 (关系范畴 (RelSet)). *RelSet is defined as follows:*

- $Ob(RelSet) = Ob(Set)$
- For every $A, B \in Ob(Set)$,

$$Hom_{RelSet}(A, B) = \mathcal{P}(A \times B) = \{f \mid f \subseteq A \times B\},$$

where $\mathcal{P}(A \times B)$ denotes the power set of $A \times B$.

The composition of morphisms $f \in Hom_{RelSet}(A, B)$ and $g \in Hom_{RelSet}(B, C)$ is:

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ such that } (a, b) \in f \text{ and } (b, c) \in g\},$$

and the identity morphism $1_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

显然的，集合范畴是特殊的关系范畴。在后面，我们可以用“子范畴”去描述二者的关系。

与集合范畴相关的一个重要范畴是“有限集范畴”。由于这个范畴的关键性质需要涉及“对象的同构”和“满子范畴”的概念，我们放在此节最后讲解。

下面的几个范畴都和群、环、域相关，我们在抽象代数里面都很熟悉了，不再予以过多分析。

例 1.23 (群范畴 (Grp)). *Grp is the category of groups: $Ob(Grp)$ is the class of all groups, and $Hom_{Grp}(A, B)$ is the set of all group homomorphisms from A to B .*

例 1.24 (单群范畴 (SGrp)). *SGrp denotes the category of simple^A groups (groups with only trivial normal subgroups and themselves) with group homomorphisms as morphisms.*

例 1.25 (阿贝尔群范畴 (Ab)). *Ab is the category of abelian groups, with group homomorphisms as morphisms. It is a “subcategory” (见后面) of Grp.*

例 1.26 (可除群范畴 (Div)). *Div is the category of divisible^B groups (for any positive integer n and group element g , there exists h such that $nh = g$), with group homomorphisms as morphisms.*

例 1.27 (环范畴 (Rng)). *Ring is the category of (unital, associative) rings, with ring homomorphisms as morphisms.*

注意， Rng 里的态射是不要求保持单位元。事实上，如果我们要求对象集都是含幺环且态射为保幺元的环同态，则显然也可以是一个范畴，我们常常记为 $Ring$ 。

例 1.28 (交换环范畴 (CRing)). *CRing is the category of commutative rings, with unit-preserving ring homomorphisms as morphisms. It is a subcategory of Ring.*

例 1.29 (域范畴 (Field)). *Field is the category of fields, with field homomorphisms as morphisms. It is a subcategory of Ring.*

例 1.30 (左 R -模范畴 $({}_R\text{Mod})$). For a fixed unital (not necessarily commutative) ring R , ${}_R\text{Mod}$ (or Mod_R) is the category of left R -modules, with R -module homomorphisms as morphisms.

特别的, when R is a field k , this category is denoted Vect_k (vector space category); 有意思的是, when $R = \mathbb{Z}$, it coincides with Ab (since $\mathbb{Z}$ -modules are abelian groups, 我们在交换代数里已经熟悉).

下面的几个例子和拓扑空间有关。

例 1.31 (拓扑空间范畴 (Top)). Top has topological spaces as its objects and continuous functions as its morphisms.

例 1.32 (带基点拓扑空间范畴 (Top_*)). Top_* is the category of topological spaces where $\text{Ob}(\text{Top}_*)$ is the class of all topological spaces while $\text{Hom}_{\text{Top}_*}(A, B)$ is the set of continuous functions between A and B .

Top_* stands for the category of pointed topological spaces, that is, the objects are pairs (A, a_0) where A is a topological space and $a_0 \in A$ while the morphisms between two such pairs (A, a_0) and (B, b_0) are just continuous functions $f : A \rightarrow B$ such that $f(a_0) = b_0$.

我们当然可以只关注一些特殊的拓扑空间。也就是说, 我们可以对拓扑范畴的对象全体进行一个限制。

例 1.33 (豪斯多夫拓扑空间范畴 (Haus)). Haus is the category of Hausdorff topological spaces, with $\text{Hom}_{\text{Haus}}(A, B)$ being the set of continuous functions between A and B .

例 1.34 (紧豪斯多夫拓扑空间范畴 $(K\text{Haus})$). $K\text{Haus}$ denotes the category of compact Hausdorff topological spaces, with continuous functions as morphisms.

下面的范畴和代数拓扑有关。

例 1.35 (链复形范畴 (Ch_R)). Ch_R has chain complexes of R -modules as objects and chain homomorphisms as morphisms. 这种定义在同调代数里面用的多。

当然, 当 $R = \mathbb{Z}$ 时, 我们就得到基于 abel 群的链复形。这样定义的链复形在代数拓扑里面可能用得比较多。

在函子一节中我们可以看到, 利用拓扑空间里的连续函数可以诱导出链映射, 从而构造出一个重要的函子。

上述例子已经远远超过我们研究的主题了。但是学过代数拓扑的读者一定可以体会到这种观点的美妙 (统一性)。

下面是一个名字很好玩的例子。

例 1.36 (光滑流形范畴 (Man)). Man has smooth manifolds as objects and smooth maps as morphisms.

这是微分拓扑里的例子, 我不太熟悉。

到现在, 我们研究的范畴都十分 “具体”:

- ▶ 所有的对象, 要么直接是一个集合, 要么是基于一个集合 (如拓扑空间)
- ▶ 所有的态射, 都是集合之间的映射。

在范畴论里，“具体范畴”是一个专有的名词，我们可以利用函子给出严格的定义。事实上，上述这类基于集合定义出来的范畴，我们都可以利用遗忘函子证明他们确实是具体范畴。另外一个很意思的结论是：所有的小范畴都是具体范畴。但这是后话。

我们下面想给出一些比较“抽象”的范畴。这些范畴中，有些的对象可以完全是任意的东西（如 (B, G) 范畴），有些的态射可以不是集合之间的映射（如矩阵范畴），有些的态射甚至可以是任意的东西（如预序范畴）。读者一定要习惯这种观点，否则没有学习范畴论的必要了。

例 1.37 (矩阵范畴 (Mat_K))。对于幺环 K ，矩阵范畴 Mat_K 的定义如下：

- ▶ **对象**：正整数；
- ▶ **态射集**：从 n 到 m 的态射集为 K 上的 $m \times n$ 矩阵全体（矩阵里的每个元素是幺环里的元素）；
- ▶ **复合运算**：矩阵乘法。若有态射 $n \xrightarrow{A} m$ （其中 A 是 $m \times n$ 矩阵）和 $m \xrightarrow{B} k$ （其中 B 是 $k \times m$ 矩阵），则它们的复合为 $n \xrightarrow{B \cdot A} k$ （ $B \cdot A$ 是由矩阵乘法得到的 $k \times n$ 矩阵）；
- ▶ **恒等态射**：单位矩阵。对每个正整数 n ，态射 $n \xrightarrow{I_n} n$ 中的 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。

单位矩阵的存在性由环 K 为幺环保证。一个比较关键的地方是复合律的证明，事实上，只需要按照线性代数中矩阵的乘法展开，然后利用“环中加法是交换的”即可证明。显然，矩阵范畴是一个局部小的小范畴。

可以看到，在矩阵范畴里，态射变成矩阵了——这当然不是一个集合的映射。这帮助我们消除了“态射一定是一种映射”的观点。

下面这个例子是后面要大量使用的，请读者一定要重视。

例 1.38 $((B, G))$. A monoid $(M, \cdot)$ can be seen as a small category (B, G) with a single object denoted by $*$. The set of morphisms is $\text{Hom}_M(*, *) = M$, and the composition of morphisms is given by the multiplication of M , and the identity morphism on $*$ is the unit 1_M of M .

注意，这里的对象是可以随便取的，想取什么都可以（完全可以不是基于某个集合构建起来的结构），取成苹果都可以。这里的态射是幺半群中的元素，这当然也可以不是集合之间的映射。

下面这个范畴也是极其重要的。

例 1.39 (预序集范畴 $(\text{PO}(X, \leq))$)。Any pre-ordered set $(X, \leq)$ defines a small category $\text{PO}(X, \leq)$ as follows: $\text{Ob}(\text{PO}(X, \leq)) = X$, and for every $x, y \in X$,

$$\text{Hom}_{\text{PO}(X, \leq)}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } x \not\leq y, \\ \{u_{x,y}\} & \text{if } x \leq y, \end{cases}$$

where $u_{x,y}$ denotes the unique morphism from x to y . 注意，这里的这个 $u_{A,B}$ 也可以是十分随意的东西（比如苹果梨子之类的）。

事实上，层论里的“预层”就是基于一个特殊的预序范畴定义出来的。见下图：

注 1.40. 预序范畴要求这个对象全体必须是一个集合，这主要是为了保证范畴是小的。但只去掉这个要求的话，对整体并没有什么影响，仍然构成一个范畴。下面的 $\text{Set}(\subseteq)$ 就是基于这个思路构造出来的。

We can 模仿上面的思路，generalize pre-ordered set categories to the level of classes.

2.1. Presheaves and sheaves

Let X be a topological space. Recall that associated to X we have a category $Cat(X)$, whose objects consist of the open subsets of X and such that for every open subsets U and V of X , the set of arrows $U \rightarrow V$ contains precisely one element if $U \subseteq V$ and it is empty, otherwise.

DEFINITION 2.1.1. Given a topological space X and a category $\mathcal{C}$, a *presheaf* on X of objects in $\mathcal{C}$ is a contravariant functor $\mathcal{F}: Cat(X) \rightarrow \mathcal{C}$. Explicitly, this means that for every open subset U of X , we have an object $\mathcal{F}(U)$ in $\mathcal{C}$, and for every inclusion of open sets $U \subseteq V$, we have a *restriction map*

$$\rho_{V,U}: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

that satisfies:

例 1.41 (集包含范畴 ($\text{Set}(\subseteq)$)). Consider the category $\text{Set}(\subseteq)$ with the class of all sets as objects. For all sets A, B ,

$$\text{Hom}_{\text{Set}(\subseteq)}(A, B) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } A \not\subseteq B, \\ \{u_{A,B}\} & \text{if } A \subseteq B, \end{cases}$$

where $u_{A,B}$ denotes the unique morphism from A to B .

注意，这里的这个 $u_{A,B}$ 也可以是十分随意的东西。

有预序范畴，很容易想到还有偏序范畴。

例 1.42 (偏序集范畴 (Poset)). Poset is the category whose objects are partially ordered sets (sets with a reflexive, antisymmetric, transitive relation), and morphisms are order-preserving maps.

教材中还提及了图范畴和图生成范畴，这个内容我们选择放在“范畴的构造”一节里面讲。至此，我们基本上讲完了常见的一些简单的范畴。

值得一提的是，在教材 1.1 的习题里面，作者提到了一个极其重要的范畴：切片范畴。这个范畴可以视为逗号范畴的特例，我们将在学完函子和自然变换之后再详细地研究。

现在我们要来看一种普遍的观点。在抽象代数中我们知道，一个群和另一个群同构的时候，我们通常把这两个群视为“等价的”/“相等的”，因为这两个群有许多性质都一样；在拓扑中，一个拓扑空间和另一个拓扑空间同胚的时候，我们通常把这两个空间视为等价的，因为它们也有许多性质是相同的。可以看到，把两个通过特殊映射 (态射) 联系起来的数学对象，视为等价的，是数学里面普遍存在的观点。当然，这种等价不是完全相等，而是有许多重要的性质都是一样的。

下面，我们要介绍范畴中“对象等价”的概念，这是对上面数学现象的一般性的描述。

定义 1.43 (同构). 范畴中的**同构**是一个态射 $f: X \rightarrow Y$ ，存在态射 $g: Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = 1_X$ 且 $f \circ g = 1_Y$ 。若对象 X 和 Y 之间存在同构，则称 X 和 Y **同构**，此时记作 $X \cong Y$ 。

注意，这里的同构一个是指“同构态射”，一个是指“同构的对象”。在后面，我们还会定义“同构范畴”等等，读者要注意区分。

注 1.44. 定义域等于上域的态射称为**自态射** (endomorphism)，是同构的自态射称为**自同构** (automorphism)。

在给出具体例子之前，我们还要给出一个会用到的简单的集合论命题：

命题 1.45. 设 A, B 为非空集合，映射 $f: A \rightarrow B$ 是单射且满射，当且仅当存在映射 $g: B \rightarrow A$ ，使得 $g \circ f = id_A$ 且 $f \circ g = id_B$

证明是简单的。上面两个等价条件都可以定义集合论中的双射。

第一个例子就是集合范畴相关的。

例 1.46. 集合范畴 (Set) 中 $A \rightarrow B$ 的同构态射就是集合 A 到集合 B 的双射。这是显然的 (集合论里面的双射定义和范畴论里同构的定义基本一样)。

下面的例子是抽代里的。

例 1.47. 群范畴 (Group) 中的同构态射就是双射的群同态 (即群同构, 但是使用后者可能在这里会引起混乱, 故不用)。需要指出的是, 这里的双射是集合论里的双射 (见命题。), 而不是范畴论里“态射的双射”, 后者的定义在下一节会给出。我们现在证明一下这个例子。

一方面, 考虑双射的群同态 $f: A \rightarrow B$, 由集合中双射的定义: 存在一个映射 $f^{-1}: B \rightarrow A$, 使得 $f^{-1} \circ f = id_A$ 且 $f \circ f^{-1} = id_B$. 现在只需要证明 f^{-1} 是 Group 中的一个态射。即证明 f^{-1} 是一个群同态。这又等价于, 对任意 $h_1, h_2 \in H$, 需证:

$$f^{-1}(h_1 * h_2) = f^{-1}(h_1) \cdot f^{-1}(h_2)$$

因 f 是满射 (命题 2.1.2), 故存在 $g_1, g_2 \in G$, 使得 $f(g_1) = h_1$ 、 $f(g_2) = h_2$ 。由 f^{-1} 的性质 (命题 2.1.2), 可得

$$f^{-1}(h_1) = g_1, f^{-1}(h_2) = g_2$$

又因 f 是群同态, 故有:

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2) = h_1 * h_2$$

两边同时作用逆映射得到:

$$f^{-1}(h_1 * h_2) = f^{-1}(f(g_1 \cdot g_2)) = g_1 \cdot g_2$$

再由 $f^{-1}(h_1) = g_1$ 、 $f^{-1}(h_2) = g_2$ (已证), 代入得:

$$f^{-1}(h_1 * h_2) = f^{-1}(h_1) \cdot f^{-1}(h_2)$$

故 f^{-1} 确实是一个同态。

另一方面, 考虑群范畴里的同构态射 $f: A \rightarrow B$ 。首先, f 肯定是一个群同态; 其次, 由同构态射的定义知: 存在一个群同态 $g: A \rightarrow B$, 使得 $g \circ f = 1_X$ 且 $f \circ g = 1_Y$ 。现在把 f 和 g 视为集合 $A \rightarrow B$ 之间的映射 (这当然可以, 因为群也是一个集合), 所以由集合论中双射的定义 (命题 2.1.2) 可知, f 是双射。

环范畴 (Ring)、域范畴 (Field) 以及模范畴 (Mod_R) 中的同构都是类似的。

例 1.48. 拓扑空间范畴 (Top) 中的同构就是同胚。我们也要严格证明一下。

(1) 我们先证明: 若 $f: X \rightarrow Y$ 是 Top 中的同构, 则 f 是同胚。由同构态射的定义可知: 存在逆态射 $g: Y \rightarrow X$, 满足

$$g \circ f = id_X \quad \text{且} \quad f \circ g = id_Y,$$

现在把 g 和 f 都视为集合之间的映射, 则显然 f 是双射。

又因为, f 本身是 Top 中的态射, 故 f 连续映射; 而逆态射 g 也是 Top 中的态射, 故 g 也为连续映射。因此, f 是连续的双射且逆映射连续, 即 f 是同胚。

(2) 现在我们证明: 若 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚, 则 f 是 Top 中的同构。由同胚的定义, f 是双射, 故存在逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 满足以下条件:

- ▶ $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$,
- ▶ f 连续, 故 f 是 Top 中的态射;

► f^{-1} 连续, 故 f^{-1} 是 $\mathbf{Top}$ 中的态射。

故 f 是 $\mathbf{Top}$ 中的同构态射。

最后是一个简单的情况。

例 1.49. 在偏序范畴中, 由反对称性可知: 若 $x \leq y$ 且 $y \leq x$, 则 $x = y$ 。也就是说, 范畴 $(P, \leq)$ 中仅有的同构只可能是恒等态射。而恒等态射显然满足同构的要求。故偏序范畴里同构等价于恒等态射。

我们重点来看看中间两个例子。拓扑范畴的例子告诉我们, $\mathbf{Top}$ 里的同构就是同胚。但是一个同胚映射 f , 不只是一个双射的连续映射, 还要求它的逆也是连续的 (而不只是存在逆映射)。事实上, 确实存在连续双射, 但它的逆不是连续的。

类似的, 在群范畴里面, 并不是所有的“群的底集合之间的双射”, 都是群范畴里的同构态射。事实上, 我们已经证明了, 这个双射还得是一个群同态。一个经典的例子如下: 设 $G = (\mathbb{Z}, +)$ (整数加法群), $H = (\mathbb{Z}, \circ)$, 其中运算 “ $\circ$ ” 定义为 $a \circ b = a + b + 1$ (可以验证 H 是一个群, 单位元是 -1 , 每个元素 a 的逆元是 $-a - 2$)。

定义映射 $f: G \rightarrow H$ 为恒等映射 (作为集合函数, $f(n) = n$, 是双射)。由于 $f(a + b) = a + b$, 但是 $f(a) \circ f(b) = a \circ b = a + b + 1$ 。显然, $a + b \neq a + b + 1$ (除非 $1 = 0$, 但整数中不成立), 因此 f 不保持群运算, 不是群同态, 更不是群同构。

上面的分析就启发我们思考一个问题:

我们用一些简单的定义结束这一小节。

定义 1.50. 设 C, C' 是两个范畴。若满足以下条件, 则称 C' 是 C 的子范畴:

- $Ob C' \subseteq Ob C$, 即 C' 的任意对象都是 C 的对象;
- 对任意 $A, B \in Ob C'$, 有 $Hom_{C'}(A, B) \subseteq Hom_C(A, B)$;
- C' 中态射的复合就是 C 中态射的复合;
- C' 中的恒等态射就是 C 中的恒等态射。

此外, 若对 C' 的任意对象对 (A, B) , 都有

$$Hom_{C'}(A, B) = Hom_C(A, B)$$

则称 C' 是 C 的满子范畴。

说白了, 子范畴就是对对象全体和态射全体进行限制; 满子范畴就是对象限制, 但是态射不限制。

看几个例子就懂了: (1) 范畴 $\mathbf{FinSet}$ (有限集范畴) 是 $\mathbf{Set}$ (集合范畴) 的满子范畴。

(2) 范畴 $\mathbf{Ab}$ (阿贝尔群范畴) 是 $\mathbf{Grp}$ (群范畴) 的满子范畴。

(3) 范畴 $\mathbf{Haus}$ (豪斯多夫空间范畴) 是 $\mathbf{Top}$ (拓扑空间范畴) 的满子范畴。

(5) 范畴 $\mathbf{Ring}$ (幺环范畴) 是 $\mathbf{Rng}$ (环范畴) 的子范畴, 但不是满子范畴, 因为 $\mathbf{Rng}$ 中幺环之间的态射并非都保单位元。

(6) 范畴 $\mathbf{Set}$ 是 $\mathbf{RelSet}$ (关系集范畴) 的子范畴, 但不是满子范畴, 因为并非笛卡尔积的每个子集都能定义一个函数。

定义 1.51. 广群 (群胚) 是这样一个范畴: 里面的每个态射, 都是同构态射。

很显然的, 我们前面定义的 (B, G) 范畴, 是只有一个对象的广群 (因为态射为群里元素, 而群里元素都是可逆的)。可以说, 广群是群的推广。

另外一个比较常见的广群是“基本广群”。它是这样定义的一个范畴：对任意拓扑空间 X ，其基本广群 $\Pi_1(X)$ 的对象是 X 中的点，态射是保端点的同伦类道路（即相对端点同伦的道路，视为一个同伦类）。这样的态射当然是一个同构。因为它的逆，只需要取原道路的反方向即可。具体分析可以看附录。

引理 1.52 (1.1.13). 任何范畴 C 都包含一个极大广群。极大广群就是对象全体等于 ObC ，且态射全体为所有的同构态射的子范畴。

证明. 证明是显然的。事实上，我们只需要证明这确实是一个范畴即可。而这只需要证明两个公理以及合成律是否继承了：

►

□

显然，极大广群是一个广群，而且我们可以证明这是“最大”的广群了。也就是说， C 中不存在一个与极大广群（不妨仍记为 G ）不相等的广群 G' ，使得 M 是 G' 的子范畴。

利用反证法即可。若存在，则存在 C 的另一个广群 G' ，满足 $ObG' = ObC$ 且 $G \subseteq G'$ （这里指的是 G' 的态射包含 G 的所有同构）。但是 G' 是广群，其所有态射必须是 C 中同构，而 G 已包含 C 中所有同构，故 G' 的态射集与 G 一致，即 $G' = G$ 。

注 1.53. 注意，我们还是习惯于使用“局部小范畴”作为范畴的定义。比如上述证明这里，如果允许 $Hom_C(A, B)$ 为类，则我甚至无法使用“包含”一词去描述，证明要变得十分麻烦。所以，这里我默认范畴是局部小的。

极大广群的典型例子如下： $\mathbf{Fin}_{\mathbf{Bij}}$ （有限集与双射构成的范畴）是范畴 $\mathbf{Fin}$ （有限集与所有函数构成的范畴）的极大广群。这显然是一个极大广群（和集合范畴一样，同构态射就是双射）。这个广群在自然变换一节会用到。

正如前文所说，我们要分析一下有限集范畴 $\mathbf{Fin}$ 。 $\mathbf{FinSet}$ 是这样一个局部小的范畴，其对象是有限集，而 $Hom_{\mathbf{FinSet}}(A, B)$ 就是两个有限集 A 和 B 之间所有函数的集合。 $\mathbf{FinSet}$ 当然是 $\mathbf{Set}$ 的满子范畴。

现在我们关注有限集范畴的大小。 $\mathbf{FinSet}$ 不是一个小范畴；这一点很容易看出，因为对每个集合 X ， $\{X\}$ 都是单元素集，因此是有限集。所以从所有集合构成的类，到有限集全体，有一个单射；所以所有集合构成的类的元素个数应该小于等于有限集全体，故有限集全体只能是真类（不是集合的类）。但这个要讲清楚并不简单，得利用 NBG 公理里的替换公理和类函数。这里并不像过多地研究。当然，和集合范畴一样，它们都是局部小的。

虽然集合范畴和有限集范畴都不是小范畴，但是有限集范畴与 $\mathbf{Set}$ 有一个很大的不同：范畴 $\mathbf{FinSet}$ 可以通过从每个有限集的同构类中恰好选取一个对象，再加上它们之间的所有函数，我们得到一个小范畴。

我们直接讲一下一般的理论。（见下页）

Definition 3.8.13 A category is called *essentially small* if its skeleton is a small category.

A useful characterization of essentially small categories is the following:

Proposition 3.8.14 A category is essentially small if and only if it is equivalent to a small category.

Definition 3.8.8 A *skeleton* of a category C is a full subcategory C_0 of C such that each object of C is isomorphic to exactly one object of C_0 .

Example 3.8.9 A skeleton of a given category C always exists; indeed, it can be constructed by choosing⁸ an object from each isomorphism class of objects in C and considering the full subcategory of C with this objects class.

Moreover, as an easy consequence of Theorem 3.8.5 we obtain the following:

Corollary 3.8.10 A category is equivalent to any of its skeletons.

Proof Let C_0 be a skeleton of a given category C . Then the inclusion functor $I: C_0 \rightarrow C$ is fully faithful and essentially surjective. The conclusion now follows from Theorem 3.8.5, (2).

Proposition 3.8.11 Let C_0 and D_0 be two skeletons of the categories C and D , respectively. Then C and D are equivalent if and only if C_0 and D_0 are isomorphic.

- (1) The categories **FinSet** and ${}_K\mathcal{M}^{fd}$ are essentially small. Indeed, a skeleton of **FinSet** is given by its full subcategory whose objects are the sets $\bar{n}$, for all $n \in \mathbb{N}$, where $\bar{n} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } n = 0 \\ \{1, \dots, n\} & \text{if } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$. The latter category is obviously small.

Furthermore, Example 3.8.2 shows that the category ${}_K\mathcal{M}^{fd}$ is equivalent to the small category **Mat** $_K$ defined in Example 1.2.2, (19). Hence, ${}_K\mathcal{M}^{fd}$ is essentially small by virtue of Proposition 3.8.14.

- (2) The categories **Set**, **Grp**, **Ring**, **Top** and ${}_K\mathcal{M}$ are not essentially small. We only prove the assertion regarding the category **Set** and leave the others to the reader. To this end, assume there exists a small skeleton C of **Set**. Given that $\text{Ob } C$ is a set we can consider $\text{Ob } C = \{X_i \mid i \in I\}$, where I is a set and $X_i \in \text{Ob } \mathbf{Set}$ for all $i \in I$. Now let $X = \mathcal{P}(\coprod_{i \in I} X_i)$ be the power set of the coproduct of the family of objects $(X_i)_{i \in I}$ in **Set**. As C is assumed to be the skeleton of **Set**, there exists some $i_0 \in I$ and an isomorphism in **Set** (i.e., a set bijection) between X and X_{i_0} . From Cantor's theorem⁹ we have $|\coprod_{i \in I} X_i| < |X|$. Furthermore, as $\coprod_{i \in I} X_i$ is the union of the sets $X'_i = X_i \times \{i\}$ (see Example 2.1.5, (9)) we also have $|X_i| \leq |\coprod_{i \in I} X_i|$ for all $i \in I$. Putting all this together leads in particular to $|X_{i_0}| < |X|$ and we have reached a contradiction as X was assumed to be isomorphic to X_{i_0} . Therefore, **Set** cannot have a small skeleton, as desired. $\square$

这个构造方式和商范畴更好不一样。商范畴是对态射集处理

注 1.54. 在后面，我们会利用伴随函子研究“本质小”和“骨架”更加深刻的性质。事实上，在后面我们可以证明：**SetGrp**, **Ring**, **Top** 都不是本质小的范畴。

2.1 对偶原理

定义 2.1 (1.2.1 对偶范畴). 设 $\mathcal{C}$ 是任意范畴, **对偶范畴** $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 满足:

- ▶ 对象与 $\mathcal{C}$ 完全相同;
- ▶ 对 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 f , 对应 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的一个态射 f^{op} , 且 f^{op} 的定义域是 f 的余定义域, f^{op} 的余定义域是 f 的定义域:

$$f^{\text{op}} : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}^{\text{op}} \quad \leftrightarrow \quad f : Y \rightarrow X \in \mathcal{C}.$$

也就是说, $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 与 $\mathcal{C}$ 有相同的对象和态射, 唯一的区别是“每个态射的方向都反转了”。对偶范畴 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 的其余结构定义如下:

- ▶ 对每个对象 X , 箭头 1_X^{op} 是 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中 X 的恒等态射;
- ▶ 关于合成: $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的一对态射 $f^{\text{op}}, g^{\text{op}}$ 可合成, 当且仅当 $\mathcal{C}$ 中的一对态射 g, f 可合成 (即 g 的定义域等于 f 的余定义域)。此时定义 $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}$, 即:

$$\begin{array}{ccc} f^{\text{op}} : X \rightarrow Y, g^{\text{op}} : Y \rightarrow Z \in \mathcal{C}^{\text{op}} & \rightsquigarrow & g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} : X \rightarrow Z \in \mathcal{C}^{\text{op}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ g : Z \rightarrow Y, f : Y \rightarrow X \in \mathcal{C} & \rightsquigarrow & f \circ g : Z \rightarrow X \in \mathcal{C} \end{array}$$

定义 1.2.1 中描述的数据能构成范畴 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ (即合成律满足结合律与幺元性), 当且仅当 $\mathcal{C}$ 是范畴。

2.2 特殊的对象和态射

根据范畴的哲学, 我们应该先来关注一些特殊的态射, 然后去关注特殊的对象。

首先, 我们介绍**单态射** (monomorphism) 和**满态射** (epimorphism) 的概念。它们是集合范畴 (Set) 中常见的单射 (injective) 和满射 (surjective) 函数对任意范畴的推广。

定义 2.2. 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴, 且 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 。

1. 若对任意的 $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, 只要 $f \circ g_1 = f \circ g_2$ 就有 $g_1 = g_2$, 则称 f 为**单态射**;
2. 若对任意的 $h_1, h_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, 只要 $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ 就有 $h_1 = h_2$, 则称 f 为**满态射**;
3. 若存在 $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, 使得 $f \circ f' = 1_B$ 且 $f' \circ f = 1_A$, 则称 f 为**同构** (isomorphism)。此时我们称对象 A 和 B 是**同构的** (isomorphic)。

注 2.3. 在形容词形式中, 单态射称为单的 (monic), 满态射称为满的 (epic)。简而言之, 单态射是 mono, 满态射是 epi。

可以看到, 态射的单和满是利用消去律定义的。此外, 我们发现同构态射的定义并不是集合论里面一样, 定义为单且满的态射, 而是利用单位态射去定义的。这是范畴论里一个易错点, 我们在后面的例子里会分析。事实上, “单且满”的态射, 我们定义为双态射。

定义 2.4. 同时是单态射和满态射的态射称为双态射 (bimorphism)。

在后面会看到，同构态射一定是双的，反之不然。这个反例的构造相当有意思（反正我打破脑袋都想不出来）。

下面，我们希望先指出单满态射的一些性质，然后再举例子。这是因为一些有关单满态射的例子，远比单满态射本身的性质复杂。

第一个命题是单和满的等价刻画，刻画的方法是利用诱导映射的单满性。诱导映射的方法还是左乘和右乘。

命题 2.5. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$, $f : A \rightarrow B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的单态射，当且仅当对任意对象 $C \in \mathcal{C}$ ，下述映射：

$$\begin{aligned} f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \\ g &\mapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

对所有 $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ 是单射。

证明. 先看必要性：设 f 是单态射，任取 $C \in \mathcal{C}$ 及 $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ 。若 $f_*(g_1) = f_*(g_2)$ ，则 $f \circ g_1 = f \circ g_2$ 。由 f 的单态性，得 $g_1 = g_2$ ，故 f_* 是单射。

再看充分性：设对任意 $C \in \mathcal{C}$ ， f_* 是单射。任取 $D \in \mathcal{C}$ 及 $h_1, h_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A)$ 。若 $f \circ h_1 = f \circ h_2$ ，取 $C = D$ ，则利用诱导映射，此式子等价于：

$$f_*(h_1) = f_*(h_2)$$

由于 f_* 为单映射，故 $h_1 = h_2$ ，从而 f 是单态射（消去律）。

综上，命题得证。 □

根据对偶原理，我们显然有如下命题，而这个命题是不需要证明的（因为对偶原理）。

命题 2.6. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$, $f : A \rightarrow B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的满态射，当且仅当对任意对象 $C \in \mathcal{C}$ ，下述映射：

$$\begin{aligned} f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ h &\mapsto f^*(h) = h \circ f \end{aligned}$$

对所有 $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ 是单射。

注 2.7. 对偶原理翻译的话，为什么还是单射，不是要改为满射吗？

下面的命题是单满态射以及同构态射自身的一些性质。

命题 2.8. 恒等态射是双态射。（这里的恒等态射当然是对任意的对象 $A \in \mathcal{C}$ 而言的。）

证明. $h_1 1 = h_2 1 \implies h_1 = h_2$ 表明 1 是满态射， $1 g_1 = 1 g_2 \implies g_1 = g_2$ 表明 1 是单态射。证毕。 □

命题 2.9. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$, 任意 $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 我们有：

- (i) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 都是满态射，那么 $gf : x \rightarrow z$ 也是满态射。
- (ii) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 是态射，且 gf 是满态射，那么 g 是满态射。

对偶地：

- (i) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 都是单态射，那么 $gf : x \rightarrow z$ 也是单态射。
- (ii) 若 $f : x \rightarrow y$ 和 $g : y \rightarrow z$ 是态射，且 gf 是单态射，那么 f 是单态射。

证明. 我们只证明第一个部分 (对偶的略去)。

(1) 设对任意对象 w 及任意态射 $h_1, h_2 : z \rightarrow w$, 满足:

$$h_1 \circ (gf) = h_2 \circ (gf)$$

由态射复合的结合律, 上式即为:

$$(h_1 \circ g) \circ f = (h_2 \circ g) \circ f$$

此时把 $f : x \rightarrow y$ 视为满态射, 故 $h_1 \circ g = h_2 \circ g$ 。又因为 $g : y \rightarrow z$ 是满态射, 故 $h_1 = h_2$ 。因此, $gf : x \rightarrow z$ 是满态射。

(2) 设 $h_1 f = h_2 f$, 则 $h_1 f g = h_2 f g$ 。由于 $f g$ 是满态射, 故 $h_1 = h_2$, 这表明 f 是满态射。 $\square$

可以看到, 上述几个命题的证明都是按照定义, 没有太多的技术困难。

下面, 我们关注的问题有两个:

- ▶ 同构态射和双态射的关系
- ▶ 在特定的一些范畴里, 单满态射以及同构态射, 具体是什么

对于第一个问题, 我们的答案是: 同构态射一定为双, 反之不然。

定理 2.10. 同构是双态射 (既单又满)。

证明. 设 f 是同构态射, 则存在 g 满足 $fg = 1$, $gf = 1$ 。由于 1 是双态射 (已证), 故 1 是单态射又是满态射, 由命题 2.3.4 可得 f 既是单态射又是满态射, 故为双态射。 $\square$

在一般的范畴里, 双的不一定同构, 这是范畴论和集合论的一个巨大差别。我们来看看怎么构造。

首先回顾一下交换幺环范畴。

定义 2.11 (交换幺环范畴 $\mathbf{Ring}^c$). 交换幺环范畴 $\mathbf{Ring}^c$ 是一个范畴, 其具体构成如下:

1. **对象**: 全体交换幺环 (即满足乘法交换律且包含乘法单位元 1 的环, 其中环是指装备了加法 (构成交换群)、乘法 (构成半群), 且乘法对加法满足分配律的代数结构);
2. **态射**: 交换幺环之间的环同态, 即满足以下条件的映射 $f : R \rightarrow S$ (其中 $R, S \in \mathbf{Ring}^c$):

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b), \quad f(1_R) = 1_S$$

($1_R, 1_S$ 分别为 R, S 的乘法单位元);

3. **态射的复合**: 环同态的通常复合 (满足结合律);
4. **恒等态射**: 对任意对象 $R \in \mathbf{Ring}^c$, 恒等映射 $\text{id}_R : R \rightarrow R$ (显然是环同态)。

我们考虑这个范畴里的一个态射, 即整数环到有理数环的包含映射:

$$i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

这个包含态射当然是交换幺环范畴 $\mathbf{Ring}^c$ 中的态射。现在我们要分析这个态射的单满性。

首先, 这个态射肯定是单态射 (左消去)。

证明. 设 X 是任意交换幺环, $f, g: X \rightarrow \mathbb{Z}$ 是 $\mathbf{Ring}^c$ 中的两个态射, 满足 $i \circ f = i \circ g$ 。

由于 i 是包含映射, 对任意 $x \in X$, 有:

$$i(f(x)) = f(x), \quad i(g(x)) = g(x)$$

而 $i \circ f = i \circ g$, 故可得对任意 $x \in X$, $f(x) = g(x)$, 即 $f = g$ 。

由单态射的定义可知, $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ 是 $\mathbf{Ring}^c$ 中的单态射。 $\square$

其次, 这个态射一定是满态射 (且显然不是满射)。

证明. 设 R 是另一个交换环, $f, g: \mathbb{Q} \rightarrow R$ 是两个环同态, 考虑: $f \circ i = g \circ i$ (右消去) 这等价于 $f = g$ (整数上)。现在还要证明 f 和 g 在有理数上都相等。

取任意 $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, 我们有 $1 = f(1) = f(z)f(1/z)$, 因此 $f(1/z) = 1/f(z)$ 。同理可证 $g(1/z) = 1/g(z)$; 而由于 f 和 g 在 $\mathbb{Z}$ 上的取值一致, 故 $f(1/z) = g(1/z)$ 。

对于任意 $z' \in \mathbb{Z}$, 我们有:

$$f(z'/z) = f(z')f(1/z) = g(z')g(1/z) = g(z'/z)$$

因此 $f = g$, 这说明 i 是 $\mathbf{Ring}^c$ 中的满态射。 $\square$

注 2.12. 这个例子还告诉我们, 满态射不一定为满射。

所以, 上述态射为双态射, 且显然不是同构。

证明. 假设存在环同态 $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, 则 h 需满足环同态的条件:

1. 保持加法: $h(a+b) = h(a) + h(b)$;
2. 保持乘法: $h(ab) = h(a)h(b)$;
3. 保持单位元: $h(1_{\mathbb{Q}}) = 1_{\mathbb{Z}} = 1$ 。

考虑 $\mathbb{Q}$ 中的元素 $\frac{1}{2}$, 由乘法保持性:

$$h\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) \cdot h(2)$$

左边 $h\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = h(1) = 1$, 因此:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) \cdot h(2) = 1$$

由于 $h\left(\frac{1}{2}\right), h(2) \in \mathbb{Z}$, 整数中乘积为 1 的元素只能是 $1 \times 1 = 1$ 或 $(-1) \times (-1) = 1$, 故 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \pm 1$ 。

但同时, 由加法保持性:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = h(1) = 1$$

若 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 则左边为 $1 + 1 = 2 \neq 1$; 若 $h\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, 则左边为 $-1 + (-1) = -2 \neq 1$, 均矛盾。

因此, 不存在这样的环同态 $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, 故 $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ 不可能是同构。 $\square$

因此, 我们得到了为双态射, 但非同构的态射。

当然, 有些双态射也是同构。最简单的例子就是任意范畴里的恒等态射。

命题 2.13. 恒等态射 1 是同构。

证明. 根据同构态射的定义, 若存在态射 $f : A \rightarrow B$ 和 $g : B \rightarrow A$, 使得 $f \circ g = 1_B$ 且 $g \circ f = 1_A$, 则 f 是同构。

对于恒等态射 $1_A : A \rightarrow A$, 我们取 $g = 1_A$, 则有:

$$1_A \circ 1_A = 1_A, 1_A \circ 1_A = 1_A$$

因此恒等态射是同构态射。 □

在上面, 我们发现态满射不一定是满射。事实上, 单态射也不一定是单射。这样的例子来着可除群。

定义 2.14 (可除群). 设 G 是一个阿贝尔群, 若对任意 $g \in G$ 和正整数 n , 存在 $h \in G$ 使得 $nh = g$, 则称 G 为可除群。

可除群范畴 $\mathbf{Div}$ 的对象是全体可除群, 态射是可除群之间的群同态。

我们可以证明典范的商映射: $q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是 $\mathbf{Div}$ 中的单态射。

证明. 首先, $\mathbb{Q}$ 是可除群。因为, 对任意 $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ 和正整数 n , $\frac{a}{nb} \in \mathbb{Q}$ 满足 $n \cdot \frac{a}{nb} = \frac{a}{b}$ 。

类似的容易发现, $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 也是可除群, 故 $q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是 $\mathbf{Div}$ 中的态射。

要证 q 是 $\mathbf{Div}$ 中的单态射, 需验证: 对任意可除群 G 及群同态 $f, g : G \rightarrow \mathbb{Q}$, 若 $q \circ f = q \circ g$, 则 $f = g$ 。

记 $h = f - g$, 则 $h : G \rightarrow \mathbb{Q}$ 是群同态, 且 $q \circ h = 0$ 。由商映射 q 的定义, $q(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Z}$, 故对任意 $x \in G$, $h(x) \in \mathbb{Z}$ 。

假设存在 $x_0 \in G$ 使得 $h(x_0) \neq 0$, 不妨设 $h(x_0) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 。由于 G 是可除群, 对正整数 $2h(x_0)$, 存在 $y_0 \in G$ 使得:

$$x_0 = 2h(x_0) \cdot y_0$$

将 h 作用于上式两侧 (h 是群同态, 保持加法):

$$h(x_0) = h(2h(x_0) \cdot y_0) = 2h(x_0) \cdot h(y_0)$$

注意到 $h(x_0) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 且 $h(y_0) \in \mathbb{Z}$, 上式两边除以 $h(x_0)$ 得:

$$1 = 2h(y_0)$$

但 $2h(y_0)$ 是偶数, 不可能等于 1, 矛盾。因此假设不成立, 即 $h(x) = 0$ 对所有 $x \in G$ 成立, 故 $f = g$ 。

综上, $q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是 $\mathbf{Div}$ 中的单态射。 □

上节课, 我们已经证明了集合范畴里面, 单/满映射, 一定是满态射; 现在, 我们要来证明一下反方向。

(1) 单态射为单 (集合范畴)。若 $f : A \rightarrow B$ 为单态射且 $f(a) = f(a')$, 令 $i_a, i_{a'} : \{*\} \rightarrow A$ 分别取值 a, a' 。则 $f \circ i_a = f \circ i_{a'}$, 由单态射性 $i_a = i_{a'}$, 从而 $a = a'$:

$$\{*\} \xrightarrow[i_{a'}]{i_a} A \xrightarrow{f} B.$$

(2) 满态射推满。设 $f : A \rightarrow B$ 为范畴论意义的满态射。定义 $g, h : B \rightarrow \{0, 1\}$: h 恒为 1, 而 g 在 $f(A)$ 上取 1、在其补集上取 0。于是 $g \circ f = h \circ f$; 满态射性给出 $g = h$ 。若有 $b_0 \notin f(A)$, 则 $g(b_0) = 0 \neq 1 = h(b_0)$, 矛盾。因此 $f(A) = B$ 。

2.3 函子

我们已经知道, 在一个范畴的两个对象之间可以定义态射, 而对象本身是没有什么限制的。因此, 我们当然可以把范畴本身当做一个对象, 而试着去考虑范畴之间的“态射”, 这就引出了函子的定义。

2.3.1 单函子

定义 2.15 (共变与反变函子). Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be two categories. A covariant functor (respectively contravariant functor) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consists of the following data:

- (1) a mapping $A \mapsto F(A) : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$;
- (2) for each pair of objects $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, a mapping

$$f \mapsto F(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

(respectively $f \mapsto F(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$)

subject to the following conditions:

- (1) for every $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ we have $F(1_A) = 1_{F(A)}$;
- (2) for every $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ we have

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(respectively $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

注 2.16. The term functor will denote a covariant functor. Any reference to contravariant functors will be explicitly stated.

由定义可以看出来, 函子由两块映射构成:

- ▶ 对象之间的映射 (把一个对象映射到另外一个对象)
- ▶ 态射之间的映射 (把一个态射映射到另外一个态射)

对于前者, 只有一个映射; 对于后者, 我们需要对每一个态射集 (任意两个对象都有一个态射集合) 定义一个映射, 所以可以认为有一堆映射。当然, 你也可以把所有的态射集合并起来, 然后在这个类上面按照同样的规则, 只定义一个映射 (这就是艾伦贝格他们最开始定义函子的方法)。当然, 本质上是没有什么差的。

一个有意思的点是: 函子的像不一定是一个范畴。我们首先需要定义一下什么是函子的像。

定义 2.17 (函子的像). 设函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 其像是由下面两个东西构成:

- ▶ 类 $\{F(C) \mid C \in \text{Ob } \mathcal{C}\}$
- ▶ 对任意 $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 如下集合

$$\{F(f) \mid f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\}$$

读者可能会自然想到如下改造“函子的像”, 使其成为这样一个范畴 $\mathcal{R}$:

- ▶ 对象全体: $\text{Ob}\mathcal{R} = \{F(C) \mid C \in \text{Ob}\mathcal{C}\}$ (这个不一定为集合, 可能是个类, 但是不影响)
- ▶ 态射集合: 对任意 $X, Y \in \{F(C) \mid C \in \text{Ob}\mathcal{C}\}$ (即像的对象), 定义:

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}}(X, Y) = \bigcup_{\substack{A, B \in \text{Ob}\mathcal{C} \\ F(A)=X, F(B)=Y}} \{F(f) \mid f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\}$$

但事实上, 这样定义的态射集合是远远不够的。我们来看下面这个例子。

例 2.18. 我们考虑下面这两个范畴

$$\begin{array}{ccc} 1_{C_1} \curvearrowright C_1 & \xrightarrow{f} & C_2 \\ & F & \\ 1_{D_1} \curvearrowright D_1 & \xrightarrow{h} D_2 \xrightarrow{k} D_3 \curvearrowright 1_{D_3} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1_{C_3} \curvearrowright C_3 & \xrightarrow{g} & C_4 \\ & & \end{array}$$

(Note: In the original image, there is a curved arrow from D_2 to D_3 labeled h , and a curved arrow from D_3 to D_2 labeled k . The diagram shows h and k as part of the mapping F .)

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ defined below:

对象作用

$$F(C_1) = D_1, F(C_2) = F(C_3) = D_2, F(C_4) = D_3,$$

态射作用:

$$\begin{aligned} F(f) &= h, F(g) = k \\ F(1_{C_1}) &= 1_{D_1}, F(1_{C_2}) = F(1_{C_3}) = 1_{D_2}, F(1_{C_4}) = 1_{D_3} \end{aligned}$$

这不是一个范畴, 因为按照范畴的定义, h 和 g 是可以复合的, 但是这个复合后的态射是不存在的。

可以看到, 构不成范畴的根本的原因是态射的复合不一定在里面。事实上, 我们可以如下扩充一下态射集合的定义 (其他不用动), 即可得到一个范畴 (我们称为 “函子的像生成的范畴”):

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\langle \mathcal{R} \rangle}(X, Y) &= \{ \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1 \mid k \geq 1, \exists Z_0, Z_1, \dots, Z_k \in \text{Ob}(\mathcal{R}), \\ &\quad Z_0 = X, Z_k = Y, \forall 1 \leq i \leq k, \varphi_i \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(Z_{i-1}, Z_i) \} \end{aligned}$$

这个为什么可以成为范畴, 我就略去证明了。

2.3.2 双函子

我们上面定义的函子是从一个范畴出发的。事实上, 我们可以定义多元的函子: 它是从一族范畴的积范畴 (见范畴的构造一节) 上出发的。在此, 我们只介绍最为常用的二函子/二元函子。

首先回顾一下积范畴的定义

定义 2.19. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个范畴。我们按如下方式定义积范畴 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$:

1. 对象类: $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob}\mathcal{C} \times \text{Ob}\mathcal{D}$, 即 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 的对象是形如 (C, D) 的有序对, 其中 $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 且 $D \in \text{Ob}\mathcal{D}$;
2. 态射集: 对任意对象 (C, D) 和 (C', D') , 有

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D')) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D');$$

3. 复合运算：复合映射定义为

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D')) \times \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C', D'), (C'', D'')) \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C'', D'')), \end{aligned}$$

对任意 $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D'))$ 和 $(f', g') \in \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C', D'), (C'', D''))$, 有

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g);$$

4. 单位态射：对任意对象 (C, D) , 其单位态射为

$$1_{(C, D)} = (1_C, 1_D).$$

基于此, 我们定义双函子:

定义 2.20 (共变双函子). 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}$ 是三个范畴, T 为积范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}$ 的一个对应关系, 若满足以下四个条件:

(1) 在范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 中任取一个对象 (A_1, A_2) , $T(A_1, A_2)$ 均为范畴 $\mathcal{D}$ 中对象;

(2) 任取

$$(f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}((A_1, A_2), (B_1, B_2))$$

对应有

$$T(f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(T(A_1, A_2), T(B_1, B_2))$$

(3) 在范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 中任取两个态射

$$\begin{cases} (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}((A_1, A_2), (B_1, B_2)) \\ (g_1, g_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}((B_1, B_2), (C_1, C_2)) \end{cases}$$

有

$$T((g_1, g_2)(f_1, f_2)) = T(g_1 f_1, g_2 f_2) = T(g_1, g_2)T(f_1, f_2)$$

(4) 在范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 中任取一个对象 (A_1, A_2) , 有

$$T(\varepsilon_{(A_1, A_2)}) = T(\varepsilon_{A_1}, \varepsilon_{A_2}) = \varepsilon_{T(A_1, A_2)}$$

则称 T 为范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的双函子, 其中第一个变量是共变的, 第二个变量也是共变的。

当然, 我们可以要求前后变量都是反变的。

定义 2.21 (反变双函子). 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}$ 是三个范畴, T 为积范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}$ 的一个对应关系, 若满足以下四个条件:

(1) 在范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 中任取一个对象 (A_1, A_2) , $T(A_1, A_2)$ 均为范畴 $\mathcal{D}$ 中对象;

(2) 任取

$$(f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}((A_1, A_2), (B_1, B_2))$$

对应有

$$T(f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(T(B_1, B_2), T(A_1, A_2))$$

(3) 在范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 中任取两个态射

$$\begin{cases} (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}((A_1, A_2), (B_1, B_2)) \\ (g_1, g_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}((B_1, B_2), (C_1, C_2)) \end{cases}$$

有

$$T((g_1, g_2)(f_1, f_2)) = T(g_1 f_1, g_2 f_2) = T(f_1, f_2)T(g_1, g_2)$$

(4) 在范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 中任取一个对象 (A_1, A_2) , 有

$$T(\varepsilon_{(A_1, A_2)}) = T(\varepsilon_{A_1}, \varepsilon_{A_2}) = \varepsilon_{T(A_1, A_2)}$$

则称 T 为范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的双函子, 其中第一个变量是反变的, 第二个变量也是反变的。

一个自然思考是: 是否可以定义一个变量反变, 一个变量正变的函子。回答是肯定的。事实上, 艾伦贝格等人最早定义的函子, 就是这种函子。双函子在下面的例子里面会大量出现, 请读者重视。

2.3.3 函子的各种例子和构造

我们首先介绍两个最为简单的函子: 嵌入函子和常值函子

例 2.22. 若 C' 是 C 的子范畴, 可定义嵌入函子 $I: C' \rightarrow C$: 它将 C' 中的每个对象、每个态射都映射到自身。

特别的, 若 $C' = C$, 则 I 就是恒等函子。

例 2.23. 设 C 是范畴, $D_0 \in Ob(D)$ 是固定对象, 则常值函子 $\Delta_{D_0}: C \rightarrow D$ 定义为:

- ▶ 对所有 $C \in Ob(C)$, $\Delta_{D_0}(C) = D_0$;
- ▶ 对所有 $f \in Hom_C(A, B)$, $\Delta_{D_0}(f) = id_{D_0}$ (D_0 上的恒等态射)。

现在, 我们分别考虑一下离散范畴、对偶范畴、积范畴上面的函子 (都很简单)。后面三个上面的函子都是典范 (标准的)。

例 2.24 (从离散范畴出发的函子). 我们回顾一下离散范畴: 一个范畴 $\mathcal{D}$ 称为**离散范畴**, 若它满足以下两个条件:

- ▶ $Ob(C_X) = X$
- ▶ for every $x, y \in X$,

$$Hom_{C_X}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } x \neq y, \\ \{1_x\} & \text{if } x = y, \end{cases}$$

where 1_x denotes the identity morphism of x .

若 I 是离散范畴 (一定是小的), 则对任意函子 $F: I \rightarrow C$, 其由 I 中对象的像完全确定。形式化地讲, 对所有 $i \in Ob(I)$, 指定 $F(i) \in Ob(C)$, 则函子 F 唯一确定。

这和一般的范畴完全不同。对于一般的范畴, 确定了对象映射后, 还要定义态射的作用。但是由于离散范畴的态射十分稀少 (只有恒等态射), 且函子要求单位元映射到单位元, 因此态射的作用被对象的作用唯一确定。

特别地, 若 I 是空集, 则存在唯一的函子 $F: I \rightarrow C$ (称为空函子)。

例 2.25 (对偶函子). 对任意范畴 C , 可定义对偶函子 $Q_C: C \rightarrow C^{op}$:

- ▶ 它将每个对象 $C \in Ob(C)$ 映射到自身;
- ▶ 它将每个态射 $f \in Hom_C(C, C')$ 映射到对立态射 $f^{op} \in Hom_{C^{op}}(C', C)$ 。

易知: 函子 $F: C \rightarrow D$ 是反变函子, 当且仅当 $F \circ Q_C: C^{op} \rightarrow D$ (或 $Q_D \circ F: C \rightarrow D^{op}$) 是共变函子。

例 2.26 (积范畴的投影函子). 设 C, D 是两个范畴, $C \times D$ 是它们的积范畴, 可定义两个投影函子:

1. $p_C: C \times D \rightarrow C$:

- ▶ 对所有 $(C, D) \in \text{Ob}(C \times D)$, $p_C(C, D) = C$;
- ▶ 对所有 $(f, g) \in \text{Hom}_{C \times D}((C, D), (C', D'))$, $p_C(f, g) = f$ 。

2. $p_D : C \times D \rightarrow D$:

- ▶ 对所有 $(C, D) \in \text{Ob}(C \times D)$, $p_D(C, D) = D$;
- ▶ 对所有 $(f, g) \in \text{Hom}_{C \times D}((C, D), (C', D'))$, $p_D(f, g) = g$ 。

投影函子是十分简单的一种双函子。

下面是各类 Hom 函子。他们都极其重要。事实上，我们在介绍万有系数定理时，已经提到过其中的一种 Hom 函子了。

例 2.27 (双函子 $\text{Hom}_C(-, -)$). 对任意范畴 C , 可定义双函子 $\text{Hom}_C(-, -) : C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Set}$:

- ▶ 对所有 $(A, B) \in \text{Ob}(C^{\text{op}} \times C)$, $\text{Hom}_C(A, B) = \text{Hom}_C(A, B) \in \text{Ob}(\text{Set})$;
- ▶ 对 $(f^{\text{op}}, g) \in \text{Hom}_{C^{\text{op}} \times C}((A, B), (C, D))$ (即 $f \in \text{Hom}_C(C, A)$, $g \in \text{Hom}_C(B, D)$), $\text{Hom}_C(f^{\text{op}}, g) : \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_C(C, D)$ 定义为 $\text{Hom}_C(f^{\text{op}}, g)(h) = g \circ h \circ f$ (对所有 $h \in \text{Hom}_C(A, B)$)。

要验证上述定义的作用是一个函子，当然只需验证保持恒等态射和结合律（即所谓的保持结构）。

易验证: $\text{Hom}_C(\text{id}_A^{\text{op}}, \text{id}_B)(h) = \text{id}_B \circ h \circ \text{id}_A = h$, 故双函子保持恒等态射;

同时满足结合律

$$\text{Hom}_C((f' \circ f)^{\text{op}}, g' \circ g) = \text{Hom}_C(f^{\text{op}}, g) \circ \text{Hom}_C(f'^{\text{op}}, g')$$

因此 $\text{Hom}_C(-, -)$ 是双函子。

可以看到，这个双函子就是典型的一个变元正变，一个变元反变的。

注 2.28. 我们定义 Hom 这类函子的思路都是：把对象打到相应的态射集。态射的作用则利用左右乘去定义。

一个自然的想法就是，我们可以“固定”上述双函子的一个变元，从而诱导出一个单函子。

例 2.29 (Hom 函子 (单变元)). 可定义两个单变元的 Hom 函子 (一个共变、一个反变):

1. 共变 Hom 函子 $\text{Hom}_C(C, -) : C \rightarrow \text{Set}$:

- ▶ 对所有 $A \in \text{Ob}(C)$, $\text{Hom}_C(C, A) = \text{Hom}_C(C, A) \in \text{Ob}(\text{Set})$;
- ▶ 对 $f \in \text{Hom}_C(A, B)$, $\text{Hom}_C(C, f) : \text{Hom}_C(C, A) \rightarrow \text{Hom}_C(C, B)$ 定义为 $\text{Hom}_C(C, f)(g) = f \circ g$ (对所有 $g \in \text{Hom}_C(C, A)$)。

2. 反变 Hom 函子 $\text{Hom}_C(-, C) : C \rightarrow \text{Set}$:

- ▶ 对所有 $A \in \text{Ob}(C)$, $\text{Hom}_C(A, C) = \text{Hom}_C(A, C) \in \text{Ob}(\text{Set})$;
- ▶ 对 $f \in \text{Hom}_C(B, A)$, $\text{Hom}_C(f, C) : \text{Hom}_C(A, C) \rightarrow \text{Hom}_C(B, C)$ 定义为 $\text{Hom}_C(f, C)(g) = g \circ f$ (对所有 $g \in \text{Hom}_C(A, C)$)。

我们希望严格定义所谓的“固定上述双函子的一个变元”。首先，我们需要定义什么是函子的复合。

定义 2.30 (函子的复合). 若 $F : C \rightarrow D$ 和 $G : D \rightarrow \mathcal{E}$ 是两个函子，可定义新函子 $G \circ F : C \rightarrow \mathcal{E}$:

- ▶ 对所有 $C \in \text{Ob}(C)$, $(G \circ F)(C) = G(F(C))$;
- ▶ 对所有 $f \in \text{Hom}_C(A, B)$, $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ 。

很显然，函子的复合还是一个函子。为简便，函子的“点态复合”有时记为 GF 。

注 2.31. 在定义函子的复合时，我们并没有要求函子都得是正变或者反变的。两个不同类型的函子也可以复合（这当然是完全不影响的）。

事实上，我们还能判别函子复合后的类型：若 F, G 都是共变或者反变，则 GF 也是共变函子；若一个是共变、一个是反变，则复合是反变函子。证明是简单的（只需要观察对任意态射的作用即可）。

我们希望构造一个函子，它和双变元的 $\text{Hom}_C(-, -)$ 复合后，得到单变元的 $\text{Hom}_C(C, -)$ （反变的同理）。

这个函子是在这样构造的：考虑函子 $F : C \rightarrow C^{\text{op}} \times C$ ，它是“常值函子（固定第一变元）”与“恒等函子（第二变元）”的乘积：

- ▶ 对对象: $F(X) = (\Delta_C(X), \text{id}_C(X)) = (C, X)$ （其中 $\Delta_C : C \rightarrow C^{\text{op}}$ 是常值函子，将所有 $X \in C$ 映到 $C \in C^{\text{op}}$ ； $\text{id}_C : C \rightarrow C$ 是恒等函子）；
- ▶ 对态射: 对 $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$,

$$F(f) = (\Delta_C(f), \text{id}_C(f)) = (\text{id}_C, f)$$

（注意，常值函子的态射是恒等，恒等函子的态射是自身；所以这里的 Δ_C 不用误以为是对偶函子）。

很容易验证，这是一个函子。进一步的，这个函子和 $\text{Hom}_C(-, -)$ 复合后，就是 $\text{Hom}_C(C, -)$ 。

注 2.32. 上面这个函子 F 和函子的乘积还有所区别，因为 F 的定义域直接取了两个函子共同的这个定义域，这和函子的乘积不同（函子的乘积要求定义域取两个函子定义域的乘积范畴）。

可以看到，无论是单变量还是双变量，两个函子对对象的作用都是把一对对象，映射到他们之间的态射集合。事实上，我们可以让这个态射集合不仅仅是一个集合，而是可以获得/继承一些原范畴的结构。下面的几个例子很好的解释了我们的这种想法。

例 2.33. 若 $A, B \in \text{Ab}$ 范畴的对象，则 $\text{Hom}_{\text{Ab}}(A, B)$ 具有 *Abel* 群结构，定义为：

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \quad (1.4)$$

其中 $f, g \in \text{Hom}_{\text{Ab}}(A, B)$ 且 $a \in A$ 。进一步，若 $f \in \text{Hom}_{\text{Ab}}(B, C)$ ，易知 $\text{Hom}_{\text{Ab}}(A, f)$ 是群同态。因此，对任意 $A \in \text{Ab}$ 范畴的对象，我们得到一个函子 $\text{Hom}_{\text{Ab}}(A, -) : \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ 。

例 2.34 (紧开拓扑). 若 $X, Y \in \text{Top}$ 范畴的对象，则连续映射集 $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ 被赋予所谓的**紧开拓扑**¹⁵——这一拓扑在后续处理伴随函子时会尤为重要。我们先验证：若 $f \in \text{Hom}_{\text{Top}}(Y, Z)$ ，则 $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, f) : \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Z)$ 关于紧开拓扑是连续映射。

事实上，设 $K \subseteq X$ 是紧子集， $U \subseteq Z$ 是开集， $W(K, U)$ 是 $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Z)$ 上紧开拓扑的一个子基开集。由于 $f^{-1}(U)$ 是 Y 的开子集，我们有：

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Top}}(X, f)^{-1}(W(K, U)) &= \{t \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \mid \text{Hom}_{\text{Top}}(X, f)(t) \in W(K, U)\} \\ &= \{t \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \mid (f \circ t)(K) \subseteq U\} \\ &= \{t \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \mid t(K) \subseteq f^{-1}(U)\} \\ &= W(K, f^{-1}(U)). \end{aligned}$$

由于验证映射的连续性只需检查余域的子基（参见 [39, 第 103 页] 的讨论），我们可得出 $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, f)$ 是连续的（符合预期）。因此，我们得到一个函子 $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, -) : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ 。

$\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ 上的**紧开拓扑**是由以下集合生成的拓扑：

上述这种要求“态射集合继承某种结构”的思路，后面被用来定义充实范畴（加细范畴）。在那里，两个对象对应的“态射集合”，不在是简单的一个集合了，而是一个么半范畴里面的对象。

现在我们要分析另外一种函子。他们的定义方法都基于笛卡尔积。

例 2.35 (笛卡尔积双函子). 笛卡尔积双函子 $- \times - : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ 定义如下 (对所有 $X, Y \in \mathbf{Ob} \mathbf{Set}$, 以及 $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, C)$ 、 $g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(B, D)$):

$$\begin{cases} (- \times -)(A, B) = A \times B; \\ (- \times -)(f, g) = f \times g : A \times B \rightarrow C \times D, \end{cases}$$

其中对所有 $a \in A$ 、 $b \in B$, 有 $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$ 。

可以看到, 笛卡尔积双函子和 $\mathbf{Hom}$ 不一样, 它把两个对象 (就是集合) 直接映射为两个集合的笛卡尔积; 而态射映射为态射的“乘积” (按分量定义的)。

和 $\mathbf{Hom}$ 函子里的处理一样, 我们可以固定一个变量, 得到单函子。

例 2.36 (笛卡尔积函子). 对任意集合 X , 可定义对应的笛卡尔积函子

$$- \times X : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$$

对所有 $Y, Z \in \mathbf{Ob} \mathbf{Set}$ 及 $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z)$:

$$\begin{cases} (- \times X)(Y) = Y \times X; \\ (- \times X)(f) = f \times 1_X : Y \times X \rightarrow Z \times X, \end{cases}$$

其中对所有 $y \in Y$ 、 $x \in X$, 有 $(f \times 1_X)(y, x) = (f(y), x)$ 。

类似地, 可定义笛卡尔积函子 $X \times - : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ 。

和 $\mathbf{Hom}$ 函子一样, 当给定集合带有额外结构时, 对应的笛卡尔积也可以继承这些结构。下面, 我们把笛卡尔积函子应用与拓扑空间范畴, 看看如何给笛卡尔积赋予结构。

例 2.37 (拓扑空间的笛卡尔积函子). 设 $\mathbf{Top}$ 是拓扑空间与连续映射构成的范畴, 对任意拓扑空间 $X \in \mathbf{Ob} \mathbf{Top}$, 可定义函子 $- \times X : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$, 其对对象和态射的作用分别为:

- ▶ 作用于对象: 对任意拓扑空间 $Y \in \mathbf{Ob} \mathbf{Top}$, 函子将 Y 映为乘积空间 $Y \times X$, 其中 $Y \times X$ 上赋予 **积拓扑** (即由子基 $\{\pi_Y^{-1}(U) \mid U \text{ 是 } Y \text{ 中的开集}\} \cup \{\pi_X^{-1}(V) \mid V \text{ 是 } X \text{ 中的开集}\}$ 生成的拓扑, π_Y, π_X 为投影映射)。形式化表示为:

$$(- \times X)(Y) = Y \times X$$

- ▶ 作用于态射: 对任意连续映射 $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ (即 $f : Y \rightarrow Z$ 是连续映射), 函子将 f 映为乘积映射 $f \times 1_X : Y \times X \rightarrow Z \times X$, 其中 1_X 是 X 上的恒等映射, 且乘积映射的定义为:

$$(f \times 1_X)(y, x) = (f(y), x) \quad (\forall y \in Y, \forall x \in X)$$

函子还有一个常见的构造思路, 就是利用万有性质。我们这里利用群论里面我们熟悉的一个命题, 给出一个构造的例子。万有性质的严格定义在书中第二章会给出。

定义 2.38 (交换子群). 设 G 为一个群, G 的交换子群 (或导群) $[G, G]$ 是由 G 中所有交换子生成的子群, 即:

$$[G, G] = \langle [x, y] \rangle = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$$

其中交换子即为 $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ (部分文献记为 (x, y))。

我们考虑在群 G 中商掉它的交换子群, 得到一个商群, 这个过程我们成为群的“阿贝尔化”。

定义 2.39 (阿贝尔化). 群 G 的阿贝尔化指对于一个群 G , 构造相应的商群 G_{ab} :

$$G_{ab} = G/[G, G].$$

有了商群, 我们马上得到一个典范映射:

$$\pi_G : G \rightarrow G_{ab}$$

其中, 对任意 $g \in G$, $\pi_G(g) = g[G, G]$ (即 g 所在的陪集)。

注 2.40. G_{ab} 当然是阿贝尔群。事实上, 我们需要证明对任意 $g_1, g_2 \in G$, 有:

$$g_1[G, G]g_2[G, G] = g_2[G, G]g_1[G, G]$$

由商群的定义可知上式等价于:

$$g_1g_2(g_1)^{-1}(g_2)^{-1} \in [G, G]$$

而这是显然的 (由交换子群的定义可知)。

对于上述商群, 我们有如下熟知的命题。

命题 2.41 (泛性质). 设 G 为群, $\pi_G : G \rightarrow G_{ab}$ 为典范投影, 则对任意阿贝尔群 H 和任意群同态 $f : G \rightarrow H$, 存在唯一的群同态 $\tilde{f} : G_{ab} \rightarrow H$, 使得:

$$\tilde{f} \circ \pi_G = f.$$

至此, 我们终于可以利用上述泛性质定义如下一个函子。

定义 2.42 (阿贝尔化函子). 阿贝尔化函子 $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 定义如下:

1. 对对象的作用: 任取群 $G \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Grp})$, 定义 $F(G) = G_{ab} = G/[G, G]$ (即 G 的阿贝尔化);
2. 对态射的作用: 任取群同态 $f : G \rightarrow H$ (即 $f \in \mathbf{Hom}(\mathbf{Grp})(G, H)$), 定义 $F(f) = f_{ab} : G_{ab} \rightarrow H_{ab}$, 其中 f_{ab} 是满足以下等式的唯一群同态:

$$f_{ab} \circ \pi_G = (\pi_H \circ f) \text{ (把右式视为同一个群同态)}$$

我们准备证明一下这确实是一个函子。要证明 F 是函子, 需验证以下两个公理:

命题 2.43. 阿贝尔化函子是一个函子。

证明. 首先证明保持单位态射。任取群 G , 设 $\text{id}_G : G \rightarrow G$ 是 G 上的单位同态 (即对任意 $g \in G$, $\text{id}_G(g) = g$)。需证 $F(\text{id}_G) = \text{id}_{G_{ab}}$, 其中 $\text{id}_{G_{ab}}$ 是 G_{ab} 上的单位同态。

根据定义 2.1.1(2), $F(\text{id}_G) = (\text{id}_G)_{ab}$ 是满足以下等式的唯一同态:

$$(\text{id}_G)_{ab} \circ \pi_G = \pi_H \circ \text{id}_G.$$

右侧化简: $\pi_G \circ \text{id}_G = \pi_G$ (单位同态的复合性质)。另一方面, 单位同态 $\text{id}_{G_{ab}}$ 满足:

$$\text{id}_{G_{ab}} \circ \pi_G = \pi_G.$$

因此 $(\text{id}_G)_{ab}$ 和 $\text{id}_{G_{ab}}$ 都满足同一等式, 由命题 1.2.1 的唯一性可知 $(\text{id}_G)_{ab} = \text{id}_{G_{ab}}$, 即 $F(\text{id}_G) = \text{id}_{F(G)}$ 。

其次证明保持态射复合。任取群同态 $f : G \rightarrow H$ 和 $g : H \rightarrow K$, 需证 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (其中 $g \circ f : G \rightarrow K$ 是同态的复合, 即 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$)。

根据定义 2.1.1(2): $-F(g \circ f) = (g \circ f)_{ab}$, 满足 $(g \circ f)_{ab} \circ \pi_G = \pi_K \circ (g \circ f)$; $-F(g) \circ F(f) = g_{ab} \circ f_{ab}$, 下面验证其满足同一等式:

$$(g_{ab} \circ f_{ab}) \circ \pi_G = g_{ab} \circ (f_{ab} \circ \pi_G) \quad (\text{态射复合的结合律})$$

由 f_{ab} 的定义, $f_{ab} \circ \pi_G = \pi_H \circ f$, 代入得:

$$g_{ab} \circ (\pi_H \circ f) = (g_{ab} \circ \pi_H) \circ f \quad (\text{态射复合的结合律})$$

由 g_{ab} 的定义, $g_{ab} \circ \pi_H = \pi_K \circ g$, 代入得:

$$(\pi_K \circ g) \circ f = \pi_K \circ (g \circ f) \quad (\text{态射复合的结合律})$$

因此 $g_{ab} \circ f_{ab}$ 满足 $(g_{ab} \circ f_{ab}) \circ \pi_G = \pi_K \circ (g \circ f)$ 。

根据命题 1.2.1 的唯一性, 满足该等式的同态唯一, 故 $(g \circ f)_{ab} = g_{ab} \circ f_{ab}$, 即 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ 。

综上, F 满足函子的两个公理, 故 F 是函子。□

最后, 是一个简单的函子。当我们需要抛弃掉一些结构的时候, 我们就会使用这个函子。

例 2.44 (遗忘函子). 所谓“遗忘函子”, 是指遗忘 (部分) 结构的函子。例如: 范畴 $\mathbf{Set}$ (例 1.2.2 (7)) 允许一个遗忘函子到 $\mathbf{Set}$, 它将该范畴的对象映为其底层集合, 将态射 (同态) 映为底层集合之间的底层映射。这样定义的作用当然是一个函子。

类似地, 还有许多仅遗忘域范畴对象部分结构的遗忘函子例子:

$$\begin{aligned} \mathbf{Grp} &\rightarrow \mathbf{Set}, && \text{遗忘群结构;} \\ \mathbf{Top} &\rightarrow \mathbf{Set}, && \text{遗忘拓扑结构;} \\ \mathbf{Rng} &\rightarrow \mathbf{Ab}, && \text{遗忘乘法;} \\ \mathbf{Ab} &\rightarrow \mathbf{Grp}, && \text{遗忘交换性;} \\ \mathbf{Ring} &\rightarrow \mathbf{Rng}, && \text{遗忘单位元;} \\ \mathbf{Top}_* &\rightarrow \mathbf{Top}, && \text{遗忘基点;} \\ \mathbf{Haus} &\rightarrow \mathbf{Top}, && \text{遗忘 Hausdorff 性质.} \end{aligned}$$

2.3.4 函子的性质

3.1 基本群函子与布劳威尔不动点定理

3.1.1 基本群的定义与拓扑基本性质

我们先回顾代数拓扑中基本群的核心定义。

定义 3.1 (道路与闭道路). 设 X 为拓扑空间, 连续映射 $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow X$ 称为 X 中道路, $\alpha(0)$ 为起点, $\alpha(1)$ 为终点; 若 $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, 则称 α 为 x_0 处的闭道路。

定义 3.2 (道路同伦). 设 $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ 是 X 中起点为 x_0 、终点为 x_1 的两条道路, 若存在连续映射 $H : I \times I \rightarrow X$ 满足:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t), & H(t, 1) &= \beta(t), & \forall t \in I; \\ H(0, s) &= x_0, & H(1, s) &= x_1, & \forall s \in I, \end{aligned}$$

则称 α 与 β 相对端点同伦, 记为 $\alpha \simeq \beta \text{ (rel } \{0, 1\})$ 。

利用道路同伦, 我们马上可以定义一个等价关系, 从而得到基本群。

定义 3.3 (基本群). 取定 $x_0 \in X$, 记 $\Omega(X, x_0)$ 为 x_0 处所有闭道路的集合, 在道路同伦关系下的等价类全体记为 $\pi_1(X, x_0)$ 。现在定义等价类的乘法:

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta],$$

其中 $\alpha * \beta$ 为道路的乘积:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

则 $\pi_1(X, x_0)$ 关于上述乘法构成群, 称为 X 在 x_0 处的基本群。

为证明布劳威尔不动点定理, 我们直接给出以下代数拓扑基本结论 (无需证明):

性质 3.4 (基本群的拓扑不变性). 下面是基本群的一些性质:

1. 若拓扑空间 $X \cong Y$ (同胚), 则 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ (群同构);
2. 单位圆 S^1 的基本群 $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ (无限循环群);
3. 单位圆盘 $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (也常常记为 S^2) 是可缩空间, 其基本群 $\pi_1(B^2, x_0) = \{e\}$ (平凡群);
4. 若 A 是 X 的收缩核, 则包含映射 $i : A \rightarrow X$ 诱导基本群的单同态 $i_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 。

3.1.2 基本群函子的定义

基本群是范畴论中函子的典型实例, 我们将其构造为从拓扑空间范畴到群范畴的函子:

首先回顾一下拓扑空间范畴和群范畴。

定义 3.5 (拓扑空间范畴与群范畴). 1. 拓扑空间范畴 Top :

- ▶ 对象类 $\text{Obj}(Top)$ 为所有拓扑空间;
- ▶ 态射集 $\text{Hom}_{Top}(X, Y)$ 为 $X \rightarrow Y$ 的连续映射, 态射复合为映射的复合。

2. 群范畴 Grp :

- ▶ 对象类 $\text{Obj}(Grp)$ 为所有群;
- ▶ 态射集 $\text{Hom}_{Grp}(G, H)$ 为群同态 $\varphi: G \rightarrow H$, 态射复合为同态的复合。

现在可以定义基本群函子了 (从带基点的拓扑空间映射到基本群)

定义 3.6 (基本群函子). 定义函子 $\Pi_1: Top_* \rightarrow Grp$ (Top_* 为带基点的拓扑空间范畴, 要求连续映射要保持基点的对应):

1. 对象层面: 对任意带基点拓扑空间 (X, x_0) , $\Pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$;
2. 态射层面: 对任意连续映射 $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, 诱导同态 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, 满足

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha], \quad \forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0).$$

这个是一个函子 (略去证明), 所以这个函子满足函子公理: $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $\text{id}_* = \text{id}$ 。

3.1.3 布劳威尔不动点定理的证明

我们利用基本群函子的拓扑不变性证明 2 维布劳威尔不动点定理, 其高维推广可通过同调群函子完成。

定理 3.7 (2 维布劳威尔不动点定理). 任意连续映射 $f: B^2 \rightarrow B^2$ 必有不动点, 即存在 $x_0 \in B^2$ 使得 $f(x_0) = x_0$ 。

证明. 采用反证法, 假设 f 无不动点, 即对任意 $x \in B^2$, $f(x) \neq x$ 。

1. 构造收缩映射: 对任意 $x \in B^2$, 过点 $f(x)$ 作射线从 $f(x)$ 指向 x , 该射线与 B^2 的边界 $S^1 = \partial B^2$ 交于唯一一点, 记为 $r(x)$ 。定义映射 $r: B^2 \rightarrow S^1$, 则 r 是连续映射, 且对任意 $x \in S^1$, $r(x) = x$ (即 r 是 B^2 到 S^1 的收缩核)。

2. 诱导基本群同态: 设 $i: S^1 \rightarrow B^2$ 为包含映射, 则 $r \circ i = \text{id}_{S^1}$ 。由基本群函子的函子性, 诱导同态满足:

$$r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, 1)}: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(B^2, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1).$$

3. 导出矛盾: 已知 $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ (非平凡群), 而 $\pi_1(B^2, 1) = \{e\}$ (平凡群)。因此 $i_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(B^2, 1)$ 必为零同态, 进而 $r_* \circ i_*$ 也为零同态, 与 $r_* \circ i_* = \text{id}$ 矛盾。

故假设不成立, f 必有不动点。 □

3.2 反变函子的补充说明与典型例子

3.2.1 反变函子的回顾

首先回顾反变函子的核心定义

定义 3.8 (反变函子). 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 若满足:

1. 对象层面: $F(X) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ 对任意 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$;
2. 态射层面: 对任意态射 $f: X \rightarrow Y$, $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$ (态射方向反转);

3. 函子公理： $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$,

则称 F 为反变函子。

注 3.9. 1. 教材 P16 页主要讲解的是“聚类算法”，这属于计算机科学应用范畴，与范畴论核心理论无关，故略去；

2. 反变函子的定义在上节课已熟悉，本节不再重复。

3.2.2 反变函子的典型例子

下面是书中的反变函子的几个例子，我们补充一下。最为关键的是第二个例子，这在下面讲解自然变换的时候马上就要用到。

幂集函子 设 Set 为集合范畴，定义幂集函子 $\mathcal{P} : Set \rightarrow Set$ (反变)：

- ▶ 对象层面：对任意集合 X , $\mathcal{P}(X)$ 为 X 的幂集 (所有子集构成的集合)；
- ▶ 态射层面：对任意映射 $f : X \rightarrow Y$, 诱导映射 $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, 满足

$$\mathcal{P}(f)(B) = f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \quad \forall B \subseteq Y.$$

即把一个集合映射到它在 f 下面的原像集。

- ▶ 反变性验证：对映射 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, 有

$$\mathcal{P}(g \circ f)(C) = (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) = \mathcal{P}(f)(\mathcal{P}(g)(C)),$$

即 $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(f) \circ \mathcal{P}(g)$, 满足反变函子公理。

线性空间对偶函子 首先，给出对偶空间的定义。

定义 3.10 (对偶空间). 对线性空间 V , 其对偶空间 $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$, 即 $V \rightarrow k$ 的所有线性函数 (线性泛函) 构成的线性空间。

设 $Vect_k$ 为域 k 上的线性空间范畴，定义对偶空间函子 $(-)^* : Vect_k \rightarrow Vect_k$ (反变)：

- ▶ 对象层面：对任意线性空间 V , $(-)^*(V) = V^*$ ；
- ▶ 态射层面：对任意线性映射 $T : V \rightarrow W$, 诱导对偶映射 $T^* : W^* \rightarrow V^*$, 满足

$$T^*(\varphi) = \varphi \circ T, \quad \forall \varphi \in W^*.$$

即 $T^*(\varphi)(v) = \varphi(T(v))$ 对任意 $v \in V$ 成立；

这个函子和自然变换关系紧密，我们后面会详细讲解。事实上，按照这个定义方式，我们还可以把 V^* 视为一个向量空间，并对它再次按照上面的操作定义一个函子，这就是双重对偶函子。

开集函子与闭集函子 设 Top 为拓扑空间范畴，对任意拓扑空间 X , 记 $\tau(X)$ 为其开集族， $\mathcal{F}(X)$ 为其闭集族，定义开集函子 $\mathcal{O} : Top \rightarrow Set$ (反变)：

- ▶ 对象层面： $\mathcal{O}(X) = \tau(X)$ ；(把拓扑空间映射为它上面的开集族)
- ▶ 态射层面：对连续映射 $f : X \rightarrow Y$, 定义 $\mathcal{O}(f) : \tau(Y) \rightarrow \tau(X)$ 满足

$$\mathcal{O}(f)(U) = f^{-1}(U), \quad \forall U \in \tau(Y).$$

这个态射的定义是合理的：因为 f 是连续函数，所以保证 $f^{-1}(U) \in \tau(X)$ （开集的原像是开集），且保持复合也是显然的（利用一下函数原像 f^{-1} 的性质）：

$$\mathbb{O}(g \circ f) = \mathbb{O}(f) \circ \mathbb{O}(g)$$

完全同理，可定义闭集反变函子 $\mathcal{F} : Top \rightarrow Set$ ，态射作用为 $\mathcal{F}(f)(F) = f^{-1}(F)$ （ F 为闭集）。

接下来的这两个例子是代数几何里面的。

素谱函子 素谱函子是代数几何的核心工具。我们首先定义素理想和扎里斯基拓扑。

定义 3.11 (素理想). 设 A 为交换幺环， $\mathfrak{p} \subseteq A$ 是 A 的真理想（即 $\mathfrak{p} \neq A$ ）。若对任意 $a, b \in A$ ，满足

$$ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \text{ 或 } b \in \mathfrak{p},$$

则称 $\mathfrak{p}$ 为环 A 的 **素理想** (Prime Ideal)。

等价刻画： $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想当且仅当商环 $A/\mathfrak{p}$ 是整环（无零因子的交换幺环）。

基于素理想可以定义扎里斯基拓扑。

定义 3.12 (扎里斯基拓扑). 设 A 为交换幺环，记 $\text{Spec}(A)$ 为 A 的所有素理想构成的集合（素谱）。对任意子集 $S \subseteq A$ ，定义

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p}\},$$

则 $\{V(S) \mid S \subseteq A\}$ 满足闭集公理（证明是容易的），称为 $\text{Spec}(A)$ 上的扎里斯基拓扑， $(\text{Spec}(A), \text{Zariski})$ 为拓扑空间。

满足闭集公理（证明是容易的）

现在可以定义素谱函子 $\text{Spec} : CRing \rightarrow Top$ （ $CRing$ 为交换幺环范畴）：

- ▶ 对象层面：对交换幺环 A ， $\text{Spec}(A)$ 为其素谱（其上有扎里斯基拓扑，所有是一个拓扑空间）；
- ▶ 态射层面：对环同态 $\varphi : A \rightarrow B$ ，诱导连续映射 $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ ，满足

$$\text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}), \quad \forall \mathfrak{q} \in \text{Spec}(B).$$

验证： $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ 是 A 的素理想，且 $\text{Spec}(\varphi)$ 关于扎里斯基拓扑连续（因闭集原像为闭集）。

可能要证明一下。

5. 预层 预层我们上上节课提了一嘴

定义 3.13 (预层). 设 X 为拓扑空间， $\mathcal{C}$ 为范畴， X 上的 $\mathcal{C}$ -值预层是反变函子 $\mathcal{F} : \text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ ，其中 $\text{Open}(X)$ 为 X 的开集构成的范畴。

这个开集范畴就是经典的偏序范畴。我们回顾一下它的定义：

定义 3.14 (开集范畴 $\text{Open}(X)$). 设 X 为拓扑空间，定义 X 的 **开集范畴** $\text{Open}(X)$ 如下：

- **对象**： $\text{Ob}(\text{Open}(X)) = \{U \subseteq X \mid U \text{ 是 } X \text{ 的开子集}\}$ ，即 X 的所有开集构成对象类；
- **态射**：对任意两个对象 $U, V \in \text{Ob}(\text{Open}(X))$ ，态射集 $\text{Hom}_{\text{Open}(X)}(U, V)$ 定义为：

$$\text{Hom}_{\text{Open}(X)}(U, V) = \begin{cases} \{i_{U \subseteq V}\}, & \text{若 } U \subseteq V \text{ (仅含一个表示包含关系的态射)}, \\ \emptyset, & \text{若 } U \not\subseteq V \text{ (无态射)}. \end{cases}$$

其中 $i_{U \subseteq V} : U \rightarrow V$ 称为 **包含态射**，表征开集 U 包含于 V 的关系；

- **态射复合**：对任意开集 $U \subseteq V \subseteq W$ ，复合态射 $i_{V \subseteq W} \circ i_{U \subseteq V} = i_{U \subseteq W}$ ，满足结合律；
- **恒等态射**：对任意对象 $U \in \text{Ob}(\text{Open}(X))$ ，恒等态射 $\text{id}_U = i_{U \subseteq U}$ （即自身到自身的包含态射）。

由于 $\text{Open}(X)$ 的态射由开集的包含偏序关系唯一决定，因此 $\text{Open}(X)$ 也称为 **** 偏序范畴 **** (Poset Category)。

注 3.15. 当然，这是一个相当一般的定义，我们当然可以定义一些比较特殊的预层。

3.3 函子的保持与反射性质

3.3.1 保持与反射的核心定义

首先明确函子对态射性质的“保持”与“反射”的概念：

定义 3.16 (保持与反射). 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子， P 是态射的某一性质：

1. 保持性质：若对任意态射 $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ ，当 f 在 $\mathcal{C}$ 中具有性质 P 时， $F(f)$ 在 $\mathcal{D}$ 中也具有性质 P ，则称 F 保持性质 P ；
2. 反射性质：若对任意态射 $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ ，当 $F(f)$ 在 $\mathcal{D}$ 中具有性质 P 时， f 在 $\mathcal{C}$ 中也具有性质 P ，则称 F 反射性质 P 。

3.3.2 函子的基本性质

我们先介绍函子最基础的性质——保持同构，并补充函子对单/满态射的其他性质。

1. 函子保持同构 函子的核心性质之一是“保持同构”，我们以命题形式给出并证明：

命题 3.17 (函子保持同构). 任意函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 保持同构，即若 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 是同构，则 $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ 也是同构。

证明. 设 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 是同构，其逆态射为 $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ ，则满足：

$$f \circ g = \text{id}_B, \quad g \circ f = \text{id}_A.$$

对上述等式应用函子 F ，由函子的公理（保持复合、保持恒同态射）可得：

$$F(f) \circ F(g) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}, \quad F(g) \circ F(f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}.$$

因此 $F(f)$ 是同构，其逆为 $F(g)$ 。

□

这个证明是极其简单的。

2. 函子对单/满态射的性质 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子，我们讨论其对单、满态射的性质：

性质 3.18 (函子不一定保持单态射). 函子不一定保持单态射。

性质 3.19 (函子不一定保持满态射). 函子不一定保持满态射。

例子如下。取遗忘函子即可。设 $U : \mathbf{Div} \rightarrow \mathbf{Set}$ 忘掉可除群结构。商映射 $q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 在 $\mathbf{Div}$ 中是单态射，但 $U(q)$ 不是集合意义的单射，因为 $U(q)(0) = U(q)(1)$ 。同理，遗忘函子 $U : \mathbf{Ring}^c \rightarrow \mathbf{Set}$ 不保持满态射：包含 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 在交换幺环范畴中为满态射，而底层集合映射并非满射。

性质 3.20 (函子保持分裂单/满态射). 函子保持分裂单态射与分裂满态射。

证明. (1) 若 $f : A \rightarrow B$ 是分裂单态射 (存在 $g : B \rightarrow A$ 使 $g \circ f = \text{id}_A$)，对函子 F 应用得： $F(g) \circ F(f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ ，故 $F(f)$ 仍然是分裂单态射；

(2) 完全同理的。若 $f : A \rightarrow B$ 是分裂满态射 (存在 $g : B \rightarrow A$ 使 $f \circ g = \text{id}_B$)，对函子 F 应用得： $F(f) \circ F(g) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}$ ，故 $F(f)$ 是分裂满态射。□

3. 全忠实与忠实函子的反射性质 全忠实函子与忠实函子具有更强的反射性质，我们以命题形式总结 (证明见后续章节)：

命题 3.21 (全忠实函子的反射性质). 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是全忠实函子，则：

1. F 反射同构；
2. F 反射初始对象与终对象。

命题 3.22 (忠实函子的反射性质). 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是忠实函子，则： F 反射单态射与满态射。

注 3.23. 关于“忠实函子”“全函子”的定义，以及上述命题的详细证明，将在后续“函子的等价”章节 (教材 P30) 中展开讨论。

当然，由这个命题也可以看出来：并非所有函子都能反射同构，我们以“遗忘函子”为例说明：

例 3.24 (函子无法反射同构的反例). 遗忘函子 $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ 不反射同构：取两个拓扑空间 $X = \{0, 1\}$ (离散拓扑)、 $Y = \{0, 1\}$ (平凡拓扑)，定义映射 $f : X \rightarrow Y$ 为集合意义下的恒等映射，即 $U(f)$ 是集合意义下的双射 (同构)。

上述的条件即下面这段话：

- ▶ $X = \{0, 1\}$ ，赋予离散拓扑 $\tau_X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ ；
- ▶ $Y = \{0, 1\}$ ，赋予平凡拓扑 $\tau_Y = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$ ；
- ▶ $f : X \rightarrow Y$ 为集合意义下的恒等映射，即 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 。

我们断言 f 不是拓扑空间的同胚 (离散拓扑到平凡拓扑的连续映射不可逆)，从而肯定不是拓扑范畴里的同构态射。

反证法。假设存在连续映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = \text{id}_X$ 且 $f \circ g = \text{id}_Y$ ，则 g 必为集合意义下的恒等映射 (因 f 是集合双射，逆映射唯一且为恒等)。

只需验证恒等映射 $g : Y \rightarrow X$ 不连续：

取 X 中的开集 $U = \{0\} \in \tau_X$ ，其原像为

$$g^{-1}(U) = \{0\} \subseteq Y$$

而 Y 的平凡拓扑 τ_Y 中仅含 $\emptyset$ 和 $\{0, 1\}$, $\{0\} \notin \tau_Y$, 即 $g^{-1}(U)$ 不是 Y 中的开集。

故根据连续性定义, g 不连续, 因此 f 不存在连续逆映射, 即 f 不是 $\mathbf{Top}$ 中的同构 (同胚)。综上, f 不是 $\mathbf{Top}$ 中的同构。

3.3.3 群作用

群的“作用”是群论中的核心概念, 利用函子可将其范畴化, 推广到任意范畴上的作用。

3.3.4 群的范畴化表示: $\mathcal{BG}$

首先回顾群的范畴化模型: 对任意群 G , 可构造单对象范畴 $\mathcal{BG}$:

- ▶ 对象类 $\text{Obj}(\mathcal{BG}) = \{*\}$ (仅一个对象);
- ▶ 态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{BG}}(*, *) = G$ (群元素对应态射);
- ▶ 态射复合对应群的乘法, 恒同态射对应群的单位元。

$\mathcal{BG}$ 是群 G 的范畴化表示, 群元素可视为单对象上的自同态。

3.3.5 群在范畴上的左/右作用

利用函子, 可定义群在任意范畴上的“左作用”与“右作用”:

定义 3.25 (群在范畴上的作用). 设 G 是群, $\mathcal{C}$ 是任意范畴:

1. 左作用: 群 G 在 $\mathcal{C}$ 上的左作用是一个函子 $X: \mathcal{BG} \rightarrow \mathcal{C}$, 其对应:
 - ▶ 唯一对象 $* \in \text{Obj}(\mathcal{BG})$ 对应 $\mathcal{C}$ 中的对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$;
 - ▶ 每个群元素 $g \in G$ (即 $\mathcal{BG}$ 中的态射) 对应 $\mathcal{C}$ 中的自同态 $g^*: X \rightarrow X$;
 - ▶ 满足:
 - a) 复合律: $(hg)^* = h^* \circ g^*$ (对应群乘法的函子性);
 - b) 单位元: $e^* = \text{id}_X$ (群单位元对应恒同态射)。
2. 右作用: 群 G 在 $\mathcal{C}$ 上的右作用是一个函子 $X: \mathcal{BG}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ ($\mathcal{BG}^{op}$ 是 $\mathcal{BG}$ 的反范畴), 其对应:
 - ▶ 唯一对象 $* \in \text{Obj}(\mathcal{BG}^{op})$ 对应 $\mathcal{C}$ 中的对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$;
 - ▶ 每个群元素 $g \in G$ 对应 $\mathcal{C}$ 中的自同态 $g^*: X \rightarrow X$;
 - ▶ 满足:
 - a) 复合律: $(hg)^* = g^* \circ h^*$ (反范畴的复合方向反转);
 - b) 单位元: $e^* = \text{id}_X$ 。

3.3.6 典型实例: 不同范畴上的群作用

群在不同范畴上的作用对应经典代数/拓扑概念:

- 例 3.26** (群作用的实例). 1. 当 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ 时, G 的左作用称为 G -集;
2. 当 $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$ (域 k 上的线性空间范畴) 时, G 的左作用称为 G -表示 (群表示);
3. 当 $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ (拓扑空间范畴) 时, G 的左作用称为 G -空间。

注 3.27. 上面群范畴相关的内容, 在教材的 18-19 页。在教材 19 页后面, 作者首先提及了乘积范畴和 Hom 函子的定义——这在上节课已经提到了, 只是这里的符号和我们不一样。唯一需要补充的只有: 我们定义的 $\text{Hom}(c, -)$, 作者称为由对象 c 表示的函子。作者希望我们证

明 $\text{Hom}(c, -)$ 确实是一个函子。这个我们上节课已经证明了，并且给了一堆具体的例子，故此处略。

注 3.28. 教材第 19 页接着定义了积范畴和双函子 bifunctor。这在上节课也已经讲过了。P20 开头的部分上节课也已经讲过了，即所谓的 $\text{Hom}(-, -)$ 函子，具体的例子也已经给过了。此节课略去。

3.3.7 范畴的范畴与同构

首先回顾函子的逐点复合。

定义 3.29 (函子的复合). 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 、 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 是函子，则 $G \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ 是函子，满足：

$$\begin{aligned}(G \circ F)(A) &= G(F(A)), \quad \forall A \in \text{Ob} \mathcal{C}, \\ (G \circ F)(f) &= G(F(f)), \quad \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).\end{aligned}$$

接着我们定义“小范畴的范畴”，并验证其满足范畴的公理。

定义 3.30 (小范畴范畴 Cat). Cat 的对象是全体小范畴（即对象类与态射类均为集合的范畴）；对于 Cat 中任意两个对象 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ，态射集

$$\text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

定义为： $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的全体函子；态射的复合是函子的逐点复合。

下面我们证明这个范畴确实是一个范畴。

命题 3.31. Cat 是一个范畴。

证明. 我们验证范畴的三条公理：

- (1) **复合封闭性**：对任意函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 和 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ ，逐点复合 $G \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ 仍是函子。
- (2) **复合结合律**：对任意函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 、 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 、 $H: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ，有

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

这由集合映射的结合律直接可得。

- (3) **单位态射存在性**：对任意小范畴 $\mathcal{C}$ ，恒等函子 $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ （满足 $\text{id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ ， $\text{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ ）是 $\text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ 中的单位元。

此外，我们可以断言： $\text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是集合。

事实上，由小范畴的定义可知，小范畴 $\mathcal{C}$ 的对象集 $\text{Ob} \mathcal{C}$ 、 $\mathcal{D}$ 的对象集 $\text{Ob} \mathcal{D}$ 均为集合，故 $\text{Ob} \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob} \mathcal{D}$ 的映射全体是集合（这是幂集定理）；

对任意 $A, B \in \text{Ob} \mathcal{C}$ ， $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 是集合，故 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ 的映射全体是集合（并集定理）。因此 $\text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是集合。

即 Cat 是局部小范畴。 □

3.3.8 局部小范畴

Cat 仅包含小范畴，我们将其推广到局部小范畴：

定义 3.32 (局部小范畴范畴 CAT). CAT 的对象是全体局部小范畴(即对任意对象 $A, B, \text{Hom}(A, B)$ 是集合的范畴); 态射集 $\text{Hom}_{\text{CAT}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的全体函子; 态射复合是函子的逐点复合。

可以看到, 和 cat 只有对象集有区别。

注 3.33. CAT 不是局部小范畴。这个的证明略去, 是非常繁琐的集合论。

3.3.9 范畴同构

在回顾函子复合的基础上 (前面已经回顾了, 讲的时候可以直接跳过), 我们定义范畴的同构:

定义 3.34 (函子的复合). 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 是函子, 则 $G \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ 是函子, 满足:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(A) &= G(F(A)), \quad \forall A \in \text{Ob } \mathcal{C}, \\ (G \circ F)(f) &= G(F(f)), \quad \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).\end{aligned}$$

现在定义范畴同构和反同构。

定义 3.35 (范畴同构与反同构). 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是函子, 若存在函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得

$$F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}, \quad G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}},$$

则称 F 是**范畴同构**, $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是**同构的范畴**, G 是 F 的**逆同构**。
若 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ 是范畴同构, 则称 F 是**反同构** (或对偶同构)。

注意, 同构态射和它的逆的复合, 是把一个对象映射到它自己, 把一个态射也映射到它自己, 丝毫不变。

3.3.10 例子

我们给出几个范畴同构的例子, 其中一个反同构。我们利用范畴同构的原始定义, 去证明前两个例子 (即直接构造逆)。

例 3.36 (群范畴的反同构). 对任意群 G , 函子 $F: G \rightarrow G^{\text{op}}$ (将态射 g 映为其逆 g^{-1}) 是反同构。右作用可通过该反同构转化为左作用。

注意, 这里的 $\mathcal{C}_G$ 是指群 G 的范畴化 (定义在任意一个单点集上面)。对对象的作用当然是唯一的。

证明. 要证 F 是范畴反同构, 直接构造其逆函子 $F^{-1}: C_G^{\text{op}} \rightarrow C_G$:

- 对象映射: $F^{-1}(*) = *$;
- 态射映射: 对任意 $g \in \text{Hom}_{C_G^{\text{op}}}(*, *) = G$, $F^{-1}(g) = g^{-1}$ 。

这当然是逆函子。 □

例 3.37 (矩阵范畴的反同构). 矩阵范畴 Mat_k 与其反范畴同构, 同构函子是 “矩阵转置”: 将对象 n 映为自身, 将矩阵 $A \in \text{Hom}(n, m)$ 映为其转置 $A^T \in \text{Hom}(m, n)$ 。

证明. 逆函子对对象的作用不变, 都是映射到它自身; 但对态射的作用, 是原函子的一个转置。显然没, 这是逆函子。 □

后面这两个就不证明了。

例 3.38 (范畴与其反范畴的反同构). 对任意范畴 $\mathcal{C}$, 反变函子 $O_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ (将对象/态射映为自身) 是反同构。

例 3.39 (整数模与阿贝尔群的同构). 遗忘函子 $F : {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是范畴同构, 其逆函子 $G : \mathbf{Ab} \rightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{M}$ 定义为:

$$G(M) = M, \quad G(u) = u,$$

$$t \cdot m = \begin{cases} \underbrace{m + m + \cdots + m}_{t\text{次}}, & t > 0, \\ 0_M, & t = 0, \\ \underbrace{-m - m - \cdots - m}_{-t\text{次}}, & t < 0, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{Z}, m \in M.$$

相当于定义了模上的数乘作用。

3.3.11 性质

范畴同构保持初对象与终对象。回顾一下这两个概念:

定义 3.40 (初对象与终对象). 设 $\mathcal{C}$ 为范畴:

- (1) **初对象 (Initial Object)**: 若对象 $I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ 满足: 对任意对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$ 恰含 **唯一** 一个态射, 则称 I 为 $\mathcal{C}$ 的初对象 (也译作 “始对象”);
- (2) **终对象 (Terminal Object)**: 若对象 $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ 满足: 对任意对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ 恰含 **唯一** 一个态射, 则称 T 为 $\mathcal{C}$ 的终对象;
- (3) **零对象 (Zero Object)**: 若一个对象既是初对象又是终对象, 则称其为 $\mathcal{C}$ 的零对象。

下面证明。

性质 3.41 (同构保持初/终对象). 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴同构, G 是其逆函子, 则:

- (1) 若 A 是 $\mathcal{C}$ 中的初对象, 则 $F(A)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的初对象;
- (2) 若 B 是 $\mathcal{C}$ 中的终对象, 则 $F(B)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的终对象。

证明. 这个我们暂时不证明, 因为这需要用到伴随性。 □

并非所有范畴都与其对偶范畴同构, 以集合范畴为例 (这用到了我们刚刚提及的性质):

例 3.42. 范畴 $\mathbf{Set}$ 与其对偶范畴 $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ 不同构。理由如下:

- $\mathbf{Set}$ 有唯一初对象 (空集 $\emptyset$), 但有无限多个终对象 (单点集 $\{x\}$);
- $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ 的初/终对象是 $\mathbf{Set}$ 的终/初对象, 故 $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ 有无限多个初对象、唯一终对象。

若 $\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}^{\text{op}}$, 则两者的初/终对象数量应一致, 矛盾。因此 $\mathbf{Set} \not\cong \mathbf{Set}^{\text{op}}$ 。

3.3.12 伽罗瓦理论

范畴同构为伽罗瓦基本定理提供了范畴论视角的解释, 我们通过构造范畴与函子来刻画这一理论。

3.3.13 基本定义

- **有限伽罗瓦扩张**: 域扩张 E/F 是有限伽罗瓦扩张, 当且仅当:
 1. E/F 是有限扩张 (即 $[E:F] < \infty$);
 2. $|\text{Aut}(E/F)| = [E:F]$ ($\text{Aut}(E/F)$ 是 E 的自同构中固定 F 所有元素的群, 称为 E/F 的伽罗瓦群, 记为 $G = \text{Gal}(E/F)$).
- **中间域**: 若 E/F 是域扩张, 中间域是满足 $F \subseteq K \subseteq E$ 的域 K .

3.3.14 核心结论 (伽罗瓦基本定理)

设 E/F 是有限伽罗瓦扩张, 伽罗瓦群为 G , 则存在子群与中间域的双射对应:

$$\{\text{子群 } H \mid H \leq G\} \longleftrightarrow \{\text{中间域 } K \mid F \subseteq K \subseteq E\}$$

对应规则为:

- 子群 $H \mapsto \text{Fix}(H) = \{x \in E \mid \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H\}$ (H 固定的中间域);
- 中间域 $K \mapsto \text{Gal}(E/K) = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \forall x \in K\}$ (E/K 的伽罗瓦群).

范畴论刻画 我们构造两个范畴并说明其是同构的, 从而实现以范畴论语言重述伽罗瓦基本定理。

(1) 范畴 1: O_G (群 G 的子群范畴)

- **对象**: G 的子群 $H \subseteq G$;
- **态射**: 若 $H \subseteq K \subseteq G$, 则态射 $G/H \rightarrow G/K$ 是 G -等变左映射 (满足 $g \cdot f(aH) = f(g \cdot aH)$, 其中 G 在陪集上的左作用为 $g \cdot aH = (ga)H$).

(2) 范畴 2: Field_F^E (E/F 的中间域范畴)

- **对象**: E/F 的中间域 K (即 $F \subseteq K \subseteq E$);
- **态射**: 若 $F \subseteq K \subseteq L \subseteq E$, 则态射 $K \rightarrow L$ 是固定 F 的域同态 (即 E 的自同构在 K 上的限制)。

我们考虑这样的函子: $\Phi_G^E: O_G \rightarrow \text{Field}_F^E$:

对对象: 对 O_G 中的对象 $H \subseteq G$, 定义:

$$\Phi_G^E(H) = \text{Fix}(H) = \{x \in E \mid \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H\}$$

对态射: O_G 中的态射 $f: G/H \rightarrow G/K$ (对应 $H \subseteq K$), 定义 $\Phi_G^E(f): \text{Fix}(H) \rightarrow \text{Fix}(K)$ 为包含映射 (因 $H \subseteq K$ 故 $\text{Fix}(K) \subseteq \text{Fix}(H)$)。

注 3.43. 范畴同构的定义过强 (如 Set 与其对偶范畴不同构), 需引入**范畴等价**来弱化条件: 通过“自然变换”定义“函子范畴”, 将“严格相等”替换为“同伦等价”, 从而得到更灵活的范畴等价概念。自然变换与函子范畴的细节将在 1.4 节介绍, 范畴等价的完整定义在 1.5 节讲解。
需注意: “解决范畴同构过强”并非自然变换的原始动机, 但这是其强大应用之一。

3.4 自然变换

我们通过这个例子引出自然变换。

例 3.44 (对偶空间与双重对偶空间的同构). 设 V 是域 k 上的有限维向量空间, $\dim_k V = n$, 记:

- **单对偶空间**: $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$ (V 到 k 的全体线性映射);
- **双重对偶空间**: $V^{**} = \text{Hom}_k(V^*, k)$ (V^* 到 k 的全体线性映射)。

1. 单对偶同构：依赖基的选择

命题 3.45. 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基，则存在线性同构 $\phi : V \rightarrow V^*$ ，且该同构依赖于基的选择。

证明. **步骤 1：定义对偶基** 对 V 的基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ ，定义映射 $e_i^* : V \rightarrow k$ 满足：

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

将 e_i^* 线性扩张到整个 V ，即对任意 $v = \sum_{j=1}^n a_j e_j \in V$ ，有 $e_i^*(v) = a_i$ 。易验证 $e_i^* \in V^*$ ，且 $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ 是 V^* 的一组基（称为 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的对偶基）。

步骤 2：构造映射 ϕ 定义 $\phi : V \rightarrow V^*$ 为：对任意 $v = \sum_{j=1}^n a_j e_j \in V$ ，

$$\phi(v) = \sum_{j=1}^n a_j e_j^*.$$

验证 ϕ 是线性映射：对任意 $v = \sum a_j e_j, w = \sum b_j e_j \in V, \lambda \in k$ ，

$$\begin{aligned} \phi(v + \lambda w) &= \phi\left(\sum (a_j + \lambda b_j) e_j\right) = \sum (a_j + \lambda b_j) e_j^* \\ &= \sum a_j e_j^* + \lambda \sum b_j e_j^* = \phi(v) + \lambda \phi(w). \end{aligned}$$

步骤 3：验证 ϕ 是同构

- 单射：若 $\phi(v) = 0$ ，则 $\sum a_j e_j^* = 0$ ，由对偶基的线性无关性得 $a_j = 0$ ，故 $v = 0$ ；
- 满射：对任意 $f \in V^*$ ，设 $f = \sum c_j e_j^*$ ，取 $v = \sum c_j e_j$ ，则 $\phi(v) = f$ ；
- 因 $\dim V = \dim V^* = n$ ，线性双射即线性同构，故 $\phi : V \cong V^*$ 。

步骤 4：证明同构依赖基的选择 取 $V = k^2$ ，考虑两组不同基：

- 基 1： $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ ，对偶基为 $e_1^*(x, y) = x, e_2^*(x, y) = y$ ，此时 $\phi(1, 1) = e_1^* + e_2^*$ ；
- 基 2： $f_1 = (1, 1), f_2 = (1, -1)$ ，对偶基为 $f_1^*(x, y) = \frac{x+y}{2}, f_2^*(x, y) = \frac{x-y}{2}$ ，此时 $\phi'(1, 1) = f_1^*$ （ ϕ' 是基 2 下的同构）。

显然 $\phi(1, 1) \neq \phi'(1, 1)$ ，故同构依赖基的选择。 □

2. 双重对偶同构：不依赖基的选择

命题 3.46. 存在典范的线性同构 $\psi : V \rightarrow V^{**}$ ，该同构不依赖于 V 的基选择。

证明. **步骤 1：定义赋值映射** 对任意 $v \in V$ ，定义赋值映射 $\text{ev}_v : V^* \rightarrow k$ 为：

$$\text{ev}_v(f) = f(v), \quad \forall f \in V^*.$$

验证 $\text{ev}_v \in V^{**}$ ：对任意 $f, g \in V^*, \lambda \in k$ ，

$$\begin{aligned} \text{ev}_v(f + \lambda g) &= (f + \lambda g)(v) = f(v) + \lambda g(v) \\ &= \text{ev}_v(f) + \lambda \text{ev}_v(g), \end{aligned}$$

故 ev_v 是线性映射，即 $\text{ev}_v \in V^{**}$ 。

步骤 2：构造典范映射 ψ 定义 $\psi : V \rightarrow V^{**}$ 为：对任意 $v \in V$,

$$\psi(v) = \text{ev}_v.$$

验证 ψ 是线性映射：对任意 $v, w \in V$, $\lambda \in k$, 任意 $f \in V^*$,

$$\begin{aligned}\psi(v + \lambda w)(f) &= \text{ev}_{v+\lambda w}(f) = f(v + \lambda w) \\ &= f(v) + \lambda f(w) = \text{ev}_v(f) + \lambda \text{ev}_w(f) \\ &= (\psi(v) + \lambda \psi(w))(f),\end{aligned}$$

由 f 的任意性得 $\psi(v + \lambda w) = \psi(v) + \lambda \psi(w)$, 即 ψ 线性。

步骤 3：验证 ψ 是同构

- 单射：若 $\psi(v) = 0$, 则 $\text{ev}_v(f) = f(v) = 0$ 对所有 $f \in V^*$ 成立。假设 $v \neq 0$, 可取包含 v 的基 $\{v, e_2, \dots, e_n\}$, 定义 $f(v) = 1, f(e_i) = 0 (i \geq 2)$, 则 $f(v) = 1 \neq 0$, 矛盾, 故 $v = 0$;
- 满射：因 $\dim V = n$, 故 $\dim V^* = n$, $\dim V^{**} = n$, 而 ψ 是有限维空间的线性单射, 故必为满射;
- 综上, $\psi : V \cong V^{**}$ 是线性同构。

步骤 4：证明同构不依赖基的选择 ψ 的定义仅依赖“赋值映射”的本质属性：对任意 $v \in V$, $\psi(v)(f) = f(v)$ 是纯代数定义, 未涉及 V 的任何基、坐标或额外结构, 因此无论选择 V 的何种基, ψ 的表达式均保持一致, 即该同构不依赖基的选择。□

注 3.47. 上述差异引出“自然性”的核心概念：若一个构造（如同构）不依赖任意辅助选择（如基、生成元），仅由对象的本质结构决定，则称其是**自然的**。自然变换正是范畴论中刻画这种“自然性”的严格工具。

下面给出自然变换的定义。

3.4.1 自然变换的定义

自然变换是“函子之间的态射”，其核心是保持函子的“结构兼容性”（不依赖任意选择）。

定义 3.48 (自然变换与自然同构). 设 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是两个函子, 一个**自然变换** $\alpha : F \rightarrow G$ 是一族态射 $\{\alpha_C : F(C) \rightarrow G(C) \mid C \in \text{Ob } \mathcal{C}\}$, 满足：对任意态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, 下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & G(C) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & G(C') \end{array}$$

即 $\alpha_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_C$.

若所有 α_C 都是同构, 则称 $\alpha : F \rightarrow G$ 是**自然同构**, 此时称函子 F 与 G 是**自然同构的**。

3.4.2 例子

我们通过若干具体例子, 进一步理解自然变换的定义与“自然性”的内涵。

3.4.3 例 1：有限维向量空间的双重对偶自然同构

设 ${}_k\mathbf{M}$ 是域 k 上的向量空间范畴， $\text{id} : {}_k\mathbf{M} \rightarrow {}_k\mathbf{M}$ 是恒等函子， $(-)^{**} : {}_k\mathbf{M} \rightarrow {}_k\mathbf{M}$ 是双重对偶函子（将 V 映为 V^{**} ）。

定义 3.49 (双重对偶自然变换). 定义自然变换 $\eta : \text{id} \rightarrow (-)^{**}$ ，其分量 $\eta_V : V \rightarrow V^{**}$ 为 $**$ 赋值映射 $**$ ：

$$\eta_V(v)(f) = f(v), \quad \forall v \in V, f \in V^*.$$

命题 3.50. η 是自然变换；当限制到有限维向量空间范畴 ${}_k\mathbf{M}^{fd}$ 时， η 是自然同构。

证明. **自然性验证：**对任意线性映射 $u : V \rightarrow W$ ，需验证下图交换：

对任意 $v \in V, f \in W^*$ ，计算得：

$$\begin{aligned} [u^{**} \circ \eta_V](v)(f) &= \eta_V(v)(u^*(f)) = u^*(f)(v) = f(u(v)), \\ [\eta_W \circ u](v)(f) &= \eta_W(u(v))(f) = f(u(v)). \end{aligned}$$

故 $u^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ u$ ，自然性成立。

有限维时的自然同构：对有限维 V ， $\dim V = \dim V^{**}$ ，且 η_V 是线性单射（例 2 已证），故 η_V 是同构，即 η 是自然同构。□

3.4.4 例 3：恒等函子与单对偶函子不自然同构

设 ${}_k\mathbf{M}^{fd}$ 是有限维向量空间范畴， $\text{id} : {}_k\mathbf{M}^{fd} \rightarrow {}_k\mathbf{M}^{fd}$ 是协变恒等函子， $(-)^* : {}_k\mathbf{M}^{fd} \rightarrow {}_k\mathbf{M}^{fd}$ 是单对偶函子（协变）。

注 3.51. id 与 $(-)^*$ 不自然同构：单对偶函子本质是反变函子（将 $u : V \rightarrow W$ 映为 $u^* : W^* \rightarrow V^*$ ），而恒等函子是协变函子，两者的“变向”不一致，故不存在自然变换（更无自然同构）。

3.4.5 例 4：函子的恒等自然变换

对任意函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ，定义 $**$ 恒等自然变换 $1_F : F \rightarrow F$ ，其分量为：

$$(1_F)_C = \text{id}_{F(C)}, \quad \forall C \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

易验证 1_F 满足自然性：对任意 $f : C \rightarrow C'$ ，

$$F(f) \circ (1_F)_C = F(f) \circ \text{id}_{F(C)} = F(f) = \text{id}_{F(C')} \circ F(f) = (1_F)_{C'} \circ F(f).$$

3.4.6 例 4：自然同构的逆变换

设 $\alpha : F \rightarrow G$ 是自然同构（即每个 α_C 是同构），定义 $**$ 逆自然变换 $\alpha^{-1} : G \rightarrow F$ ，其分量为：

$$(\alpha^{-1})_C = (\alpha_C)^{-1}, \quad \forall C \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

命题 3.52. α^{-1} 是自然同构。

证明. 对任意 $f : C \rightarrow C'$, 由 α 的自然性 $G(f) \circ \alpha_C = \alpha_{C'} \circ F(f)$, 两边取逆得:

$$\alpha_C^{-1} \circ G(f)^{-1} = F(f)^{-1} \circ \alpha_{C'}^{-1}.$$

又因 $G(f)$ 是同构 (α 是自然同构), 故 $G(f)^{-1} = G(f^{-1})$, 同理 $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$, 代入得:

$$(\alpha^{-1})_C \circ G(f) = F(f) \circ (\alpha^{-1})_{C'},$$

即 α^{-1} 满足自然性, 且每个 $(\alpha^{-1})_C$ 是同构, 故 α^{-1} 是自然同构。□

3.4.7 例 6: 集合范畴的幂集自然变换

设 $\mathbf{Set}$ 是集合范畴, $\text{id} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是恒等函子, $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是幂集函子 (将 A 映为其幂集 PA)。

定义自然变换 $\eta : \text{id} \rightarrow P$, 其分量 $\eta_A : A \rightarrow PA$ 为 “单点集映射”:

$$\eta_A(a) = \{a\}, \quad \forall a \in A.$$

自然性验证: 对任意函数 $f : A \rightarrow B$, 需满足 $P(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ f$ 。对任意 $a \in A$,

$$P(f)(\eta_A(a)) = P(f)(\{a\}) = \{f(a)\} = \eta_B(f(a)) = (\eta_B \circ f)(a),$$

故自然性成立。

3.4.8 例 7: 群作用范畴的自然变换

设 G 是群, BG 是群 G 对应的 “单对象范畴” (对象为 $*$, 态射为 G 中元素), $X, Y : BG \rightarrow \mathcal{C}$ 是函子 (对应 $\mathcal{C}$ 中对象 X, Y 上的 G -左作用)。

自然变换 $\alpha : X \rightarrow Y$ 由 $\mathcal{C}$ 中态射 $\alpha : X \rightarrow Y$ 唯一决定, 且需满足 ** G -等变性** **: 对任意 $g \in G$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ g_X \downarrow & & \downarrow g_Y \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

即 $g_Y \circ \alpha = \alpha \circ g_X$ (g_X, g_Y 是 G 在 X, Y 上的作用)。

3.4.9 例 8: 拓扑空间的开/闭子集自然同构

设 $\mathbf{Top}^{\text{op}}$ 是拓扑空间的反范畴, $O, C : \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 分别是开子集函子与闭子集函子 (将拓扑空间 X 映为其开/闭子集族)。

定义自然同构 $\alpha : O \rightarrow C$, 其分量 $\alpha_X : O(X) \rightarrow C(X)$ 为 “补集映射”:

$$\alpha_X(U) = X \setminus U, \quad \forall U \in O(X).$$

自然性验证: 对任意连续映射 $f : X \rightarrow Y$ (对应 $\mathbf{Top}^{\text{op}}$ 中态射 $f^{\text{op}} : Y \rightarrow X$), 需满足 $\alpha_X \circ O(f^{\text{op}}) = C(f^{\text{op}}) \circ \alpha_Y$ 。对任意 $V \in O(Y)$,

$$\alpha_X(O(f^{\text{op}})(V)) = \alpha_X(f^{-1}(V)) = X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V) = C(f^{\text{op}})(\alpha_Y(V)),$$

故自然性成立, 且 α 是自然同构 (补集映射可逆)。

3.4.10 例 9：群的反群自然同构

设 $\mathbf{Group}$ 是群范畴, $(-)^{\text{op}} : \mathbf{Group} \rightarrow \mathbf{Group}$ 是反群函子 (将群 G 映为其反群 G^{op} , 群同态 $\phi : G \rightarrow H$ 映为 $\phi^{\text{op}} : G^{\text{op}} \rightarrow H^{\text{op}}$)。

定义自然同构 $\eta : \text{id} \rightarrow (-)^{\text{op}}$, 其分量 $\eta_G : G \rightarrow G^{\text{op}}$ 为“逆元映射”:

$$\eta_G(g) = g^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

自然性验证: 对任意群同态 $\phi : G \rightarrow H$, 需满足 $\eta_H \circ \phi = \phi^{\text{op}} \circ \eta_G$ 。对任意 $g \in G$,

$$\eta_H(\phi(g)) = \phi(g)^{-1}, \quad \phi^{\text{op}}(\eta_G(g)) = \phi^{\text{op}}(g^{-1}) = \phi(g^{-1}).$$

因 ϕ 是群同态, $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$, 故等式成立, 自然性得证。

3.4.11 例 10：阿贝尔群的扭子群分解非自然同构

设 $\mathbf{Ab}_{\mathbb{Z}}$ 是阿贝尔群范畴, 对任意 $A \in \mathbf{Ab}_{\mathbb{Z}}$, TA 是其扭子群, A/TA 是无扭子群, 有同构 $A \cong TA \oplus (A/TA)$ 。

命题 3.53. 上述同构 ** 不自然 ** (即不存在自然变换 $\alpha : \text{id} \rightarrow TA \oplus (A/TA)$ 使得每个 α_A 是该同构)。

证明. 假设存在这样的自然变换 α , 则复合映射:

$$A \rightarrow A/TA \rightarrow TA \oplus (A/TA) \xrightarrow{\alpha_A^{-1}} A$$

定义了 $\mathbf{Ab}_{\mathbb{Z}}$ 上恒等函子的自然自变换。但阿贝尔群范畴上恒等函子的自然自变换必是“数乘变换”(即 $\alpha_A(a) = n \cdot a$, $n \in \mathbb{Z}$)。取 $A = \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ (扭群), 则 $A/TA = 0$, 复合映射为零映射, 但数乘变换 $n \cdot a$ 在 $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ 中不为零, 矛盾。故该同构不自然。 $\square$

3.4.12 挠群、自然性与范畴化

定义 3.54 (有限生成阿贝尔群与挠子群). 阿贝尔群 A 若由有限个元素生成, 称为有限生成。其挠子群为

$$TA = \{a \in A \mid \exists n > 0, na = 0\}.$$

有限生成阿贝尔群结构定理给出 $A \cong \mathbb{Z}^r \oplus TA$, 其中 TA 有限。

对同态 $f : A \rightarrow B$, 有 $f(TA) \subseteq TB$, 所以 $T : \mathbf{Ab}_{\text{fg}} \rightarrow \mathbf{Ab}_{\text{fg}}$ 是函子。商 $A \mapsto A/TA$ 也函子化; 它们说明结构定理不仅是逐个群的分解, 也产生自然的范畴构造。

定义 3.55 (自然同构). 若函子 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 之间存在每点同构并满足自然性方块, 则称 $F \cong G$ 。逐对象同构不足以保证自然同构。

有限维向量空间的评价映射

$$\text{ev}_V : V \longrightarrow V^{**}, \quad v \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$$

不依赖基, 并对线性映射自然, 故 $1_{\mathbf{Vect}_k^{\text{fd}}} \cong (-)^{**}$ 。相反, $V \cong V^*$ 的同构通常依赖选基, 因而不能自然地选取。

范畴化与去范畴化 范畴化把集合、数或代数关系提升为范畴、函子和自然同构; 去范畴化则取同构类、基数、维数或 Grothendieck 群等不变量。有限集合的基数与有限维向量空间的维数都是去范畴化: 它们把不交并与直和送到加法, 把笛卡尔积与张量积送到乘法。范畴化的优势在于保留映射与自然性, 而不只保留数值。

4 范畴等价

4.1 范畴等价：从严格同构到结构相同

范畴同构要求函子有严格逆；这往往过强，因为数学中对象通常只在同构意义下唯一。范畴等价允许复合只与恒等函子自然同构，因此保存一切可由态射语言表达的结构。

定义 4.1 (范畴同构与范畴等价). 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴同构，若存在 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使

$$GF = 1_{\mathcal{C}}, \quad FG = 1_{\mathcal{D}}.$$

若存在函子 G 与自然同构

$$\eta: 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \quad \varepsilon: FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}},$$

则称 F 为范畴等价，称 G 为拟逆。

4.2 全、忠实与本质满

对 $A, B \in \mathcal{C}$ ，函子 F 给出映射

$$F_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB), \quad f \longmapsto Ff.$$

若它单射、满射、双射，分别称 F 忠实、全、全忠实；若每个 $D \in \mathcal{D}$ 同构于某个 FC ，称 F 本质满。全子范畴的嵌入函子全忠实；遗忘函子 $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ 忠实而不全。

定义 4.2 (合同关系与商范畴). 范畴 $\mathcal{C}$ 上的合同关系是态射上的等价关系 $\sim$ ，并满足： $f \sim f'$ 、 $g \sim g'$ 且复合有定义时， $gf \sim g'f'$ 。商范畴 $\mathcal{C}/\sim$ 有相同对象，态射为等价类 $[f]$ ，复合定义为 $[g][f] = [gf]$ 。

商函子 $\Pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ 在对象上恒等、在态射上取等价类。它总是全的；通常不忠实。例如同伦关系给出 $\mathbf{Top}$ 的同伦范畴，在其中不同的同伦映射具有同一像。若 Y 可缩，则任意 $X \rightarrow Y$ 的许多不同映射在商中相同。

4.3 等价判别准则

定理 4.3 (全忠实且本质满). 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴等价，当且仅当它全忠实且本质满。

证明. 若 F 有拟逆 G 及自然同构 η, ε ，则 $\varepsilon_D: FGD \cong D$ 表明本质满。对 $u: FX \rightarrow FY$ ，令

$$f = \eta_Y^{-1} G(u) \eta_X: X \rightarrow Y.$$

自然性给出 $Ff = u$ ；同一公式也说明 $Ff = Ff'$ 时 $f = f'$ ，所以 F 全忠实。

反之，假定 F 全忠实且本质满。对每个 $D \in \mathcal{D}$ ，选取 $GD \in \mathcal{C}$ 和同构

$$\varepsilon_D: FGD \xrightarrow{\sim} D.$$

对 $u : D \rightarrow D'$ ，由全忠实性唯一确定 $Gu : GD \rightarrow GD'$ ，使

$$F(Gu) = \varepsilon_{D'}^{-1} u \varepsilon_D.$$

唯一性立即给出 $G(1_D) = 1_{GD}$ 与 $G(vu) = G(v)G(u)$ 。再由全忠实性唯一确定 $\eta_X : X \rightarrow GFX$ ，使 $F\eta_X = \varepsilon_{FX}^{-1}$ 。这些分量均为同构；定义式给出 η 、 ε 的自然性，故 G 是拟逆。□

注 4.4 (矩阵范畴的例子). 令 $\mathbf{Mat}_k$ 的对象为自然数， $m \rightarrow n$ 的态射为 $n \times m$ 矩阵。函子 $n \mapsto k^n$ 、 $A \mapsto (v \mapsto Av)$ 把它送到有限维 k -向量空间。选择每个向量空间的一组基可构造拟逆，故

$$\mathbf{Mat}_k \simeq \mathbf{Vect}_k^{\text{fd}}.$$

选择基并不自然，这正说明这里应使用等价而非严格同构。

4.4 骨架与本质小

定义 4.5 (骨架). 范畴 $\mathcal{C}$ 的骨架是一个全子范畴 $\mathcal{C}_0$ ，满足每个 $\mathcal{C}$ 的对象同构于 $\mathcal{C}_0$ 中唯一的对象。若骨架是小范畴，则称 $\mathcal{C}$ 本质小。

命题 4.6. 骨架的嵌入 $\mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$ 全忠实且本质满，因而为范畴等价；任意两个骨架彼此同构。

有限集合范畴的骨架可取标准集合 $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$ ($\bar{0} = \emptyset$)；有限维向量空间范畴的骨架可取 k^n 。因此 $\mathbf{FinSet}$ 与 $\mathbf{Vect}_k^{\text{fd}}$ 都本质小。相反， $\mathbf{Set}$ 、 $\mathbf{Grp}$ 、 $\mathbf{Ring}$ 、 $\mathbf{Top}$ 通常不本质小；例如若 $\mathbf{Set}$ 有小骨架，从其对象的并集构造幂集会与 Cantor 定理矛盾。

注 4.7. 本章的结论把“去掉同构重复对象”的骨架构造与等价判别准则联系起来。后续讨论极限、伴随和 Yoneda 引理时，范畴等价会始终是正确的不变量语言。

5 幺半范畴与图

范畴态射的单满性

函子

自然变换的定义

特殊范畴偏序范畴

带基点拓扑空间的同伦范畴

5.1 幺半群

5.1.1 幺半群的定义

幺半群是对“带有结合二元运算和单位元的集合”这一概念的推广。在范畴论语言中，我们可以在集合范畴 $\mathbf{Set}$ 内定义它。

定义 5.1 ($\mathbf{Set}$ 中的幺半群). 一个幺半群是一个对象 $M \in \mathbf{Set}$ ，并配有一对态射：

- ▶ 一个态射 $\mu : M \times M \rightarrow M$ （称为乘法态射），它定义了 M 上的二元运算。
- ▶ 一个态射 $\eta : 1 \rightarrow M$ （称为单位态射），其中 1 表示一个单点集，它的像为 M 中的一个元素 $e = \eta(*) \in M$ （ $*$ 是 1 中唯一的元素）。

这两个态射必须使以下两个图交换：

- ▶ 乘法是结合的, 即下图是交换的：

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{1_M \times \mu} & M \times M \\ \mu \times 1_M \downarrow & & \downarrow \mu \\ M \times M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

即对任意 $a, b, c \in M$ ，有 $\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$ 。这也可以简记为 $(ab)c = a(bc)$ 。

- ▶ 单位元 e 对乘法构成双侧单位, 即下图是交换的：

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\eta \times 1_M} & M \times M & \xleftarrow{1_M \times \eta} & M \\ & \searrow 1_M & \downarrow \mu & \swarrow 1_M & \\ & & M & & \end{array}$$

用元素语言表述，即对任意 $a \in M$ ，有 $\mu(e, a) = a$ 且 $\mu(a, e) = a$ ，或简记为 $ea = a = ae$ 。

上述定义是群论范畴化的结果。更一般的，我们可以把上述概念定义为某种幺半范畴里的幺半对象。下面我们介绍一下所谓的“幺半范畴”

5.2 么半范畴

么半范畴和 abel 范畴一样，都是一般范畴的进一步推广和复杂化——附加的结构越来越多。

需要注意的是，在集合范畴中，元素之间的相等关系是直观的。但当我们转向一般范畴 B 时，我们很少谈论对象之间的严格相等，而是谈论同构。对于那些直接取为严格相等的么半范畴，我们称为严格么半范畴。

在么半群中（抽象代数），结合律 $((ab)c)d = a((bc)d) = \dots$ 允许我们以任意顺序重排 n 个元素的乘积括号，而不改变结果。但是当这种“相等”变成了同构时，不同的重排括号路径还会不会得到相同的同构对象呢？这个就是所谓一致性/相容性/贯通性的问题。我们在么半范畴的定义中就引入了相容性条件，最典型的就是五边形图和三角形图。

5.2.1 么半范畴的定义

定义 5.2 (么半范畴). 一个么半范畴是一个六元组 $\mathcal{B} = \langle B, \square, e, \alpha, \lambda, \varrho \rangle$ ，其中：

1. 一个范畴 B 。
2. 一个双函子 $\square : B \times B \rightarrow B$ （称为张量积函子）。
3. 一个对象 $e \in B$ （称为单位对象）。
4. 三个自然同构：
 - ▶ 结合子 $\alpha_{a,b,c} : a \square (b \square c) \cong (a \square b) \square c$ ，对任意 $a, b, c \in B$ 。
 - ▶ 左单位子 $\lambda_a : e \square a \cong a$ ，对任意 $a \in B$ 。
 - ▶ 右单位子 $\varrho_a : a \square e \cong a$ ，对任意 $a \in B$ 。

这些数据和自然同构必须满足以下相容性公理：(1) 五边形公理：结合子 α 必须在所有变量上是自然的，且对任意 $a, b, c, d \in B$ ，下图（五边形图）必须交换：

$$\begin{array}{ccc}
 a \square (b \square (c \square d)) & \xrightarrow{\alpha} & (a \square b) \square (c \square d) \\
 \swarrow 1 \square \alpha & & \searrow \alpha \\
 a \square ((b \square c) \square d) & \xrightarrow{\alpha} & ((a \square b) \square c) \square d
 \end{array}$$

该图保证了对四个对象的乘积进行重排括号的两种不同方式，得到的是同一个同构。

(2) 三角形公理：单位子 λ 和 ϱ 必须是自然的，且对任意 $a, c \in B$ ，下图（三角形图）必须交换：

$$\begin{array}{ccc}
 a \square (e \square c) & \xrightarrow{\alpha} & (a \square e) \square c \\
 \downarrow 1 \square \lambda & & \downarrow \varrho \square 1 \\
 a \square c & \xleftarrow{=} & a \square c
 \end{array}$$

此外，单位子在单位对象自身上必须相容：

$$\lambda_e = \varrho_e : e \square e \rightarrow e.$$

即这两个态射相等

下面我们讲解一下所谓的一致性定理，这需要先介绍么半范畴的一个特例：严格么半范畴。

5.3 严格么半范畴与一致性定理

严格么半范畴是么半范畴的一个特例，其中结合律和单位律不只是同构，而是严格的等式。

定义 5.3 (严格么半范畴). 一个严格么半范畴是一个三元组 $\langle B, \square, e \rangle$ ，其中：

1. B 是一个范畴。
2. $\square : B \times B \rightarrow B$ 是一个双函子，且满足“严格”结合律：对任意对象 $a, b, c \in B$ ，有 $a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$ 。
3. $e \in B$ 是这样一個对象：对任意对象 $c \in B$ ，有 $e \square c = c = c \square e$ 。

由定义可以看出来：任何严格么半范畴都可以自然地视为一个么半范畴。我们只需取结合子 α 、左单位子 λ 和右单位子 ρ 的分量态射为恒同态射，即这三个自然同构直接取为了恒等变换。

虽然一般的么半范畴则是“弱”的，其结合律和单位律仅由同构给出。但是我们却有如下良好的结果：

定理 5.4 (Mac Lane 严格性定理). 任意一个么半范畴都与一个严格么半范畴等价。

注 5.5. 这里的范畴等价是么半范畴等价，不是一般的范畴等价

这个定理的推论就是所谓的一致性定理：

定理 5.6 (一致性定理). 在任意么半范畴中，对于任意有限个对象的张量积，不同的换括号方式所得到的结果在唯一的自然同构下是相同的。

一致性定理保证了所有合理重排括号方式都能导出相容的同构，从而在本质上得到相同的结果。

5.4 么半范畴的例子：集合范畴

我们来严格证明集合范畴 Set 是一个么半范畴。

我们在 Set 中指定结构：

1. **范畴**： $\mathcal{B} = \text{Set}$ ，这是一个标准的范畴。
2. **双函子**： $\square = \times$ ，即集合的笛卡尔积。
 - ▶ 对对象： $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 。
 - ▶ 对态射：若 $f : A \rightarrow A', g : B \rightarrow B'$ ，则 $f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B'$ 定义为 $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ 。
3. **单位对象**： $e = \{*\}$ ，即任意一个单元素集。
4. **自然同构**：
 - ▶ **结合律同构** $\alpha_{A,B,C} : A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$ 定义为 $\alpha_{A,B,C}(a, (b, c)) = ((a, b), c)$ 。
 - ▶ **左单位同构** $\lambda_A : \{*\} \times A \rightarrow A$ 定义为 $\lambda_A((*, a)) = a$ 。
 - ▶ **右单位同构** $\rho_A : A \times \{*\} \rightarrow A$ 定义为 $\rho_A((a, *)) = a$ 。

下面我们要检验各个条件：(1) $\times$ 是双函子：

- ▶ 保持恒等态射： $\text{id}_A \times \text{id}_B = \text{id}_{A \times B}$ ，显然成立。
- ▶ 保持复合：若 $f : A \rightarrow A', f' : A' \rightarrow A'', g : B \rightarrow B', g' : B' \rightarrow B''$ ，则 $(f' \circ f) \times (g' \circ g) = (f' \times g') \circ (f \times g)$ ，也显然成立（逐点检查即可）。

因此， $\times$ 是一个双函子。

(2) α 是自然变换：对任意 $f : A \rightarrow A', g : B \rightarrow B', h : C \rightarrow C'$ ，我们需要验证下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A \times (B \times C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \times B) \times C \\ f \times (g \times h) \downarrow & & \downarrow (f \times g) \times h \\ A' \times (B' \times C') & \xrightarrow{\alpha} & (A' \times B') \times C' \end{array}$$

取任意 $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ ：

$$\text{上右路径： } \alpha(a, (b, c)) = ((a, b), c) \xrightarrow{(f \times g) \times h} ((f(a), g(b)), h(c)),$$

$$\text{左下路径： } (a, (b, c)) \xrightarrow{f \times (g \times h)} (f(a), (g(b), h(c))) \xrightarrow{\alpha} ((f(a), g(b)), h(c)).$$

两者相等，故 α 是自然的。

(3) λ 的自然性：对任意 $f : A \rightarrow A'$ ，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \{*\} \times A & \xrightarrow{\lambda} & A \\ \text{id} \times f \downarrow & & \downarrow f \\ \{*\} \times A' & \xrightarrow{\lambda} & A' \end{array}$$

取任意 $(*, a) \in \{*\} \times A$ ：

$$\text{上右路径： } \lambda(*, a) = a \xrightarrow{f} f(a),$$

$$\text{左下路径： } (*, a) \xrightarrow{\text{id} \times f} (*, f(a)) \xrightarrow{\lambda} f(a).$$

两者相等，故 λ 是自然的。

(4) ϱ 的自然性：对任意 $f : A \rightarrow A'$ ，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A \times \{*\} & \xrightarrow{\varrho} & A \\ f \times \text{id} \downarrow & & \downarrow f \\ A' \times \{*\} & \xrightarrow{\varrho} & A' \end{array}$$

取任意 $(a, *) \in A \times \{*\}$ ：

$$\text{上右路径： } \varrho(a, *) = a \xrightarrow{f} f(a),$$

$$\text{左下路径： } (a, *) \xrightarrow{f \times \text{id}} (f(a), *) \xrightarrow{\varrho} f(a).$$

两者相等，故 ϱ 是自然的。

(5) 五边形公理：我们需要验证下图交换：

$$\begin{array}{ccc} & A \times (B \times (C \times D)) & \xrightarrow{\alpha} (A \times B) \times (C \times D) \\ & \swarrow \text{id} \times \alpha & \searrow \alpha \\ A \times ((B \times C) \times D) & \xrightarrow{\alpha} & ((A \times B) \times C) \times D \end{array}$$

取任意 $(a, (b, (c, d))) \in A \times (B \times (C \times D))$:

上右路径: $(a, (b, (c, d))) \xrightarrow{\alpha} ((a, b), (c, d)) \xrightarrow{\alpha} (((a, b), c), d),$

左下路径: $(a, (b, (c, d))) \xrightarrow{\text{id} \times \alpha} (a, ((b, c), d)) \xrightarrow{\alpha} ((a, (b, c)), d) \xrightarrow{\alpha \times \text{id}} (((a, b), c), d).$

两条路径结果相同, 五边形图交换。

(6) 三角形公理: 我们需要验证下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A \times (\{*\} \times C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \times \{*\}) \times C \\ \text{id} \times \lambda \downarrow & & \downarrow \varrho \times \text{id} \\ A \times C & \xleftarrow{=} & A \times C \end{array}$$

取任意 $(a, (*, c)) \in A \times (\{*\} \times C)$:

上右路径: $(a, (*, c)) \xrightarrow{\alpha} ((a, *), c) \xrightarrow{\varrho \times \text{id}} (a, c),$

左下路径: $(a, (*, c)) \xrightarrow{\text{id} \times \lambda} (a, c).$

两条路径结果相同, 三角形图交换。

(7) 单位同构在单位对象上的一致性: 我们需要验证 $\lambda_e = \varrho_e : e \times e \rightarrow e$ 。而 $\lambda_e : \{*\} \times \{*\} \rightarrow \{*\}$ 定义为 $\lambda_e((*, *)) = *$; $\varrho_e : \{*\} \times \{*\} \rightarrow \{*\}$ 定义为 $\varrho_e((*, *)) = *$ 。

两者显然是同一个态射, 因此 $\lambda_e = \varrho_e$ 。

至此, 我们已经验证了集合范畴 Set 配备笛卡尔积 $\times$ 、单元素集 $\{*\}$ 以及上述自然同构, 满足么半范畴的全部定义。因此, Set 是一个么半范畴。我们称这种么半范畴为是一个笛卡尔么半范畴。

5.5 么半范畴中的么半群

现在我们在任意么半范畴中定义么半群的概念, 这是对我们开头提到的集合范畴中么半群的推广。

5.5.1 么半范畴中么半群的定义

设 $\langle B, \square, e, \alpha, \lambda, \varrho \rangle$ 是一个么半范畴。

定义 5.7 (么半范畴中的么半群). 在么半范畴 B 中, 一个么半群是一个对象 $c \in B$, 并配有两个态射:

- ▶ 乘法态射 $\mu : c \square c \rightarrow c$,
- ▶ 单位态射 $\eta : e \rightarrow c$,

使得以下两个图交换:

结合律图

$$\begin{array}{ccc} c \square (c \square c) & \xrightarrow{\alpha} & (c \square c) \square c \\ 1_c \square \mu \downarrow & & \downarrow \mu \square 1_c \\ c \square c & \xrightarrow{\mu} & c \end{array}$$

单位律图

$$\begin{array}{ccccc}
 e \square c & \xrightarrow{\eta \square 1_c} & c \square c & \xleftarrow{1_c \square \eta} & c \square e \\
 & \searrow \lambda & \downarrow \mu & \swarrow \varrho & \\
 & & c & &
 \end{array}$$

注 5.8. 这个定义是集合范畴中么半群定义的直接推广。当 $B = \text{Set}$ 时，我们将看到它与经典定义完全一致。

5.5.2 例子：集合范畴中的么半群

我们现在验证，在么半范畴 Set 中，上述定义的么半群，就是我们熟悉的经典么半群。

设 M 是一个经典么半群，即：

- ▶ M 是一个集合，
- ▶ 有一个二元运算 $\cdot : M \times M \rightarrow M$ （结合律），
- ▶ 有一个单位元 $e \in M$ （满足 $e \cdot x = x \cdot e = x$ ）。

我们将其对应到么半范畴 Set 中的么半群定义：

- ▶ 对象 $c = M \in \text{Set}$ 。
- ▶ 乘法态射 $\mu : M \times M \rightarrow M$ 就是二元运算 $\cdot$ ，即 $\mu(a, b) = a \cdot b$ 。
- ▶ 单位态射 $\eta : \{*\} \rightarrow M$ 定义为 $\eta(*) = e$ ，其中 e 是经典么半群的单位元。

现在我们验证这两个态射满足么半范畴中么半群的定义。满足么半范畴中么半群的定义。

结合律的验证 我们需要验证下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
 M \times (M \times M) & \xrightarrow{\alpha} & (M \times M) \times M \\
 \text{id}_M \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \times \text{id}_M \\
 M \times M & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}$$

取任意 $(a, (b, c)) \in M \times (M \times M)$ ：

$$\text{上右路径： } (a, (b, c)) \xrightarrow{\alpha} ((a, b), c) \xrightarrow{\mu \times \text{id}_M} (\mu(a, b), c) = (a \cdot b, c) \xrightarrow{\mu} (a \cdot b) \cdot c,$$

$$\text{左下路径： } (a, (b, c)) \xrightarrow{\text{id}_M \times \mu} (a, \mu(b, c)) = (a, b \cdot c) \xrightarrow{\mu} a \cdot (b \cdot c).$$

由于经典么半群的乘法是结合的，即 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ，因此两条路径的结果相等，图交换。

单位律的验证 我们需要验证下图交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 \{*\} \times M & \xrightarrow{\eta \times \text{id}_M} & M \times M & \xleftarrow{\text{id}_M \times \eta} & M \times \{*\} \\
 & \searrow \lambda & \downarrow \mu & \swarrow \varrho & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

1. 左三角：取任意 $(*, a) \in \{*\} \times M$ 。

$$\text{上路径: } (*, a) \xrightarrow{\eta \times \text{id}_M} (\eta(*), a) = (e, a) \xrightarrow{\mu} e \cdot a = a,$$

$$\text{下路径: } (*, a) \xrightarrow{\lambda} a.$$

两者相等，左三角交换。

2. 右三角：取任意 $(a, *) \in M \times \{*\}$ 。

$$\text{上路径: } (a, *) \xrightarrow{\text{id}_M \times \eta} (a, \eta(*)) = (a, e) \xrightarrow{\mu} a \cdot e = a,$$

$$\text{下路径: } (a, *) \xrightarrow{\rho} a.$$

两者相等，右三角交换。

因此，整个单位律图交换。

5.6 图与交换图

5.6.1 图的定义

在范畴论中，“图”的概念可以被精确地定义为一个函子，这使得我们可以用严格的方式讨论图的交换性等性质。

定义 5.9 (图). 在范畴 C 中的一个图 (diagram) 是一个函子 $F : J \rightarrow C$ ，其中范畴 J 被称为该图的指标范畴 (indexing category)。

我们给出一种特殊的图，正向系统。

定义 5.10. 一个在 C 上的正向系统，就是一个函子 $F : I \rightarrow C$ ，其中 I 是一个偏序范畴。

这当然是一个图，只是指标范畴取为了偏序范畴。所谓的正向极限就是这个函子（正向系统）的余极限。

5.7 初对象、终对象与零对象

5.7.1 初对象与终对象的定义

定义 5.11 (初对象与终对象). 在范畴 C 中，一个对象 $i \in C$ 称为初对象 (initial object)，如果对任意 $c \in C$ ，存在唯一的态射 $i \rightarrow c$ 。

对偶地，一个对象 $t \in C$ 称为终对象 (terminal object)，如果对任意 $c \in C$ ，存在唯一的态射 $c \rightarrow t$ 。

引理 5.12. 初对象（若存在）在同构意义下唯一；终对象（若存在）在同构意义下唯一。

证明. 若 i_1, i_2 均为初对象，则存在唯一态射 $f : i_1 \rightarrow i_2$ 和 $g : i_2 \rightarrow i_1$ 。复合 $g \circ f : i_1 \rightarrow i_1$ 必须是唯一的态射，即 id_{i_1} ；同理 $f \circ g = \text{id}_{i_2}$ 。故 $i_1 \cong i_2$ 。终对象同理。□

5.7.2 零对象与阿贝尔范畴

定义 5.13 (零对象). 在范畴 C 中, 一个对象 $0 \in C$ 称为零对象 (zero object), 如果它既是初对象又是终对象。

显然, 零对象若存在, 则也在同构意义下唯一。另一方面, 对任意对象 $a, b \in C$, 零对象诱导出唯一的零态射 $0_{a,b} : a \rightarrow b$ 。这个态射定义为 $a \rightarrow 0 \rightarrow b$ 的复合, 这当然是唯一的。

在 abel 范畴里面, 零对象可以直接定义为 $\text{Hom}(a, a) = 0$ 的这种对象 a (相当于态射群这个 abel 群坍塌为平凡群了), 而; 零态射定义为这个群里面的单位元 0 。

零对象是 abel 范畴的关键构成部分。而 abel 范畴的性质非常好, 我们在下面马上会看到几个。

定义 5.14 (阿贝尔范畴). 一个范畴 C 称为阿贝尔范畴 (abelian category), 如果它满足:

1. C 是加法范畴 (即每个 Hom 集是阿贝尔群, 且态射复合是双线性的);
2. C 有零对象;
3. 每个态射 $f \in C$ 都有核 $\ker f$ 和余核 $\text{coker } f$ (从而像 $\text{im } f$ 和余像 $\text{coim } f$ 存在);
4. 典范态射 $\text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ 是同构。

在阿贝尔范畴中, 态射的单满性判断与我们熟知的判断方法类似:

引理 5.15. 设 $f : A \rightarrow B$ 是阿贝尔范畴中的态射, 则:

1. f 是单态射 $\iff \ker f = 0$;
2. f 是满态射 $\iff \text{coker } f = 0 \iff \text{im } f = B$ 。

5.7.3 初对象、终对象与零对象的例子

下面是书中的几个例子:

例 5.16. 在集合范畴 Set 中:

- ▶ **空集是初对象:** 对任意集合 X , 存在唯一的态射 (函数) $\emptyset \rightarrow X$, 即空函数。
- ▶ **任意单点集是终对象:** 对任意集合 X , 存在唯一的态射 $X \rightarrow \{*\}$, 即将所有元素映射到 $*$ 的常值函数。
- ▶ **没有零对象:** 若存在零对象 Z , 则它必须既是初对象又是终对象, 这显然不可能。不要忘了, 初/始对象都是在同构意义下唯一的。

例 5.17. 在带基点集合范畴 Set_* 中: 其对象是带基点的集合 (X, x_0) , 态射是保持基点的函数。

- ▶ **任意单点集 $(\{*\}, *)$ 是初对象:** 对任意带基点集合 (X, x_0) , 存在唯一的态射 $(\{*\}, *) \rightarrow (X, x_0)$, 即唯一的函数 $* \mapsto x_0$, 它保持基点。
- ▶ **任意单点集 $(\{*\}, *)$ 是终对象:** 对任意带基点集合 (X, x_0) , 存在唯一的态射 $(X, x_0) \rightarrow (\{*\}, *)$, 即唯一的常值函数 $x \mapsto *$, 它保持基点 (因为 $x_0 \mapsto *$)。
- ▶ 因此, 单点集是零对象。

注意, 带基点的集合范畴里面相当于没有空集。

例 5.18. 在域范畴 Field 中:

- ▶ **没有初对象:** 假设存在初对象 K , 则对任意域 F , 存在唯一的域同态 $K \rightarrow F$ 。但域同态必然是单同态, 且保持特征。若 $\text{char}(K) = p > 0$, 则不存在同态 $K \rightarrow \mathbb{Q}$ ($\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$); 若 $\text{char}(K) = 0$, 则不存在同态 $K \rightarrow \mathbb{F}_p$ 。矛盾。

- **没有终对象**：假设存在终对象 L ，则对任意域 F ，存在唯一的域同态 $F \rightarrow L$ 。但不存在同态 $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{F}_2$ ，也不存在同态 $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{Q}$ 。矛盾。

这说明不是任何范畴都有初始对象。

现在我们考虑范畴 C 中两条可复合的态射链：

$$A \xrightarrow{f_1} \bullet \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} B, \quad A \xrightarrow{g_1} \bullet \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_m} B.$$

若起点 A 是范畴 C 的初对象：由初对象的唯一性（从初对象到任意对象的态射唯一），可知从 A 到 B 的态射唯一，因此

$$f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 = g_m \circ \dots \circ g_2 \circ g_1.$$

同理的，若终点 B 是范畴 C 的终对象：由终对象的唯一性（从任意对象到终对象的态射唯一），可知从 A 到 B 的态射唯一，因此

$$f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 = g_m \circ \dots \circ g_2 \circ g_1.$$

这就是 Lemma 1.6.19.

5.8 具体范畴

定义 5.19 (具体范畴). 一个具体范畴 (concrete category) 是一个二元组 (C, U) ，其中：

1. C 是一个范畴；
2. $U : C \rightarrow \text{Set}$ 是一个忠实函子 (faithful functor)，即对任意对象 $A, B \in C$ ，诱导的映射

$$U : \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(UA, UB)$$

是单射（集合意义下）。

称函子 U 为 C 的遗忘函子 (forgetful functor)，其将 C 中的对象映为集合范畴中的底集，态射映为底集上的函数。在不引起混淆时，可直接称范畴 C 为具体范畴。

下面是几个例子：

例 5.20. 拓扑空间范畴 (Top, U) 是一个典型的具体范畴：

- 遗忘函子 $U : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ 将拓扑空间 (X, τ) 映为其底集 X ，将连续映射 $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ 映为底集上的基础函数 $f : X \rightarrow Y$ ；
- 函子 U 是忠实的：若两个连续映射在底集上的函数相等，则这两个连续映射作为 Top 中的态射必相等，即单射性成立。

类似地，群范畴 Grp 、环范畴 Ring 、模范畴 Mod_R 等代数范畴均为具体范畴，其遗忘函子分别将对象映为底集，态射映为底集上的基础函数。

在群论中，Cayley 定理告诉我们任何群都可以嵌入到一个对称群（相当于有一个单射到对称群）中。在范畴论中，有一个类似的深刻结果：任何小范畴都可以嵌入到集合范畴中，即它必然是具体范畴（如果我们把忠实的函子看作“单”的话，用嵌入描述是合理的）。

定理 5.21. 任何小范畴都是具体范畴。

证明. 设 C 是一个小范畴。我们构造一个忠实函子 $F : C \rightarrow \text{Set}$ 如下：

1. 对象上的作用：对任意对象 $C \in \text{Ob}(C)$ ，定义

$$F(C) = \{(Y, \alpha) \mid Y \in \text{Ob}(C), \alpha \in \text{Hom}_C(Y, C)\}.$$

由于 C 是小范畴， $\text{Ob}(C)$ 、和所有态射集都是集合，因此 $F(C)$ 确实是 Set 中的一个对象（集合）。

2. 态射上的作用：对任意态射 $u \in \text{Hom}_C(C, C')$ ，定义函数

$$F(u) : F(C) \rightarrow F(C')$$

为：对任意 $(Y, \alpha) \in F(C)$ ，

$$F(u)(Y, \alpha) = (Y, u \circ \alpha).$$

下面我们验证函子性：对任意 $C \in \text{Ob}(C)$ ，取 $u = \text{id}_C$ 。则对任意 $(Y, \alpha) \in F(C)$ ，有

$$F(\text{id}_C)(Y, \alpha) = (Y, \text{id}_C \circ \alpha) = (Y, \alpha) = \text{id}_{F(C)}(Y, \alpha).$$

故 $F(\text{id}_C) = \text{id}_{F(C)}$ 。

另一方面，对任意可复合态射 $C \xrightarrow{u} C' \xrightarrow{v} C''$ ，取任意 $(Y, \alpha) \in F(C)$ ，有

$$\begin{aligned} F(v \circ u)(Y, \alpha) &= (Y, (v \circ u) \circ \alpha) \\ &= (Y, v \circ (u \circ \alpha)) \\ &= F(v)(Y, u \circ \alpha) \\ &= F(v)(F(u)(Y, \alpha)) \\ &= (F(v) \circ F(u))(Y, \alpha). \end{aligned}$$

最后一个等号是态射复合的定义故 $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$ 。因此， F 是一个函子。

最后我们验证忠实性：我们需要证明，对任意 $C, C' \in \text{Ob}(C)$ ，映射

$$F : \text{Hom}_C(C, C') \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(F(C), F(C'))$$

是单射。

设 $u_1, u_2 \in \text{Hom}_C(C, C')$ 满足 $F(u_1) = F(u_2)$ 。这意味着对所有 $(Y, \alpha) \in F(C)$ ，都有

$$F(u_1)(Y, \alpha) = F(u_2)(Y, \alpha),$$

即

$$(Y, u_1 \circ \alpha) = (Y, u_2 \circ \alpha).$$

特别地，我们取 $Y = C$ 和 $\alpha = \text{id}_C \in \text{Hom}_C(C, C)$ 。此时 $(C, \text{id}_C) \in F(C)$ ，代入上式得

$$(C, u_1 \circ \text{id}_C) = (C, u_2 \circ \text{id}_C).$$

这等价于 $u_1 = u_2$ 。因此， F 是忠实函子。

综上，我们构造了一个从 C 到 Set 的忠实函子 F ，故任何小范畴 C 都是具体范畴。 $\square$

注 5.22. 这个定理的逆命题不成立。并非所有范畴都是具体的。例如，带基点拓扑空间的同伦范畴（homotopy category of pointed spaces）就不是具体范畴，即不存在从它到 Set 的忠实函子。这表明，当范畴不再是“小”的，或者其态射包含了如“同伦类”这样的额外结构时，它可能无法被忠实地表达达到集合范畴中。

遗忘函子的选取不可随意, 尤其当范畴的对象是多分类集合 (multi-sorted sets) 时, 需构造适配的遗忘函子才能保证忠实性。我们来看一个例子。

首先, 复习一下什么是链复形和链映射: 设 $\mathbb{Z}$ 为整数集, 一个链复形 $C_* = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 由以下两部分构成:

1. 对每个整数 n , 给定一个阿贝尔群 (或 R -模) C_n , 称为 n 维链群;
2. 对每个整数 n , 给定一个群同态 (或模同态)

$$\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1},$$

称为 n 维边缘算子。

满足: 对任意整数 n , 有

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0,$$

即 “边缘的边缘是零”。

接着定义链映射: 设

$$C_* = \left(\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n^C} C_{n-1} \rightarrow \cdots \right), \quad D_* = \left(\cdots \rightarrow D_n \xrightarrow{\partial_n^D} D_{n-1} \rightarrow \cdots \right)$$

为两个链复形。一个链映射 $f_* : C_* \rightarrow D_*$ 是一族群同态 (或模同态)

$$f_n : C_n \rightarrow D_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z}),$$

满足交换恒等式: 对任意整数 n , 有

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n,$$

我们考虑环上链复形范畴 Ch_R : 其对象为链复形 $\{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, 态射为链映射 $\{f_n\} : \{C_n, d_n\} \rightarrow \{C'_n, d'_n\}$ 。

1. **不忠实的遗忘函子:** 考虑函子 $U_0 : \text{Ch}_R \rightarrow \text{Set}$, 它仅将链复形 C_* 映为 0 次模的底集 $U_R(C_0)$, 将链映射 $\{f_n\}$ 映为 $U_R(f_0) : U_R(C_0) \rightarrow U_R(C'_0)$ 。我们证明 U_0 不忠实。
取链复形 C_* : $C_1 = R, C_0 = R, C_{-1} = R$, 其余为 0; 边界映射 $d_1 = \text{id}_R, d_0 = \text{id}_R$ 。定义两个链映射 $\phi_* = \{\phi_n\}$ 和 $\psi_* = \{\psi_n\}$:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \text{id}_R, & \phi_0 &= \text{id}_R, & \phi_{-1} &= \text{id}_R; \\ \psi_1 &= -\text{id}_R, & \psi_0 &= \text{id}_R, & \psi_{-1} &= -\text{id}_R. \end{aligned}$$

验证 ψ_* 是链映射: $d_1 \circ \psi_1 = \text{id}_R \circ (-\text{id}_R) = -\text{id}_R = \psi_0 \circ d_1$; $d_0 \circ \psi_0 = \text{id}_R \circ \text{id}_R = \text{id}_R = \psi_{-1} \circ d_0$ 。因此 ϕ_* 和 ψ_* 是不同的链映射, 但 $U_0(\phi_*) = U_R(\text{id}_R) = U_0(\psi_*)$ 。故 U_0 不忠实。

2. **忠实的遗忘函子:** 构造遗忘函子 $U : \text{Ch}_R \rightarrow \text{Set}$:

$$\begin{aligned} U(C_*) &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} U_R(C_n), \\ U(\{f_n\})(x) &= U_R(f_n)(x), \quad x \in U_R(C_n). \end{aligned}$$

我们证明 U 忠实。设 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 是 $C_* \rightarrow C'_*$ 的链映射, 且 $U(\{f_n\}) = U(\{g_n\})$ 。则对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和任意 $x \in U_R(C_n)$, 有 $U_R(f_n)(x) = U(\{f_n\})(x) = U(\{g_n\})(x) = U_R(g_n)(x)$ 。由于 U_R 是模范畴的忠实函子, 故 $f_n = g_n$ 对所有 n 成立, 因此 $\{f_n\} = \{g_n\}$, U 是忠实函子。

接下来有一个显然的引理:

引理 5.23 (1.6.19). *If $U : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ is faithful, then any diagram in $\mathbf{C}$ whose image commutes in $\mathbf{D}$ also commutes in $\mathbf{C}$.*

证明. Here a diagram in $\mathbf{C}$ is a directed graph of morphisms together with a collection of desired composition relations between composable paths of morphisms. If $f_1, \dots, f_n$ and $g_1, \dots, g_m$ are parallel sequences of composable morphisms in $\mathbf{C}$ so that

$$U f_n \cdots U f_1 = U g_m \cdots U g_1$$

in $\mathbf{D}$, then by faithfulness (and functoriality) of U , $f_n \cdots f_1 = g_m \cdots g_1$ in $\mathbf{C}$. $\square$

这里所说的可交换的图，就是两串相等的“态射的复合”。

5.9 图的交换性与可消去性

5.9.1 相邻方块与外部矩形的交换性

在范畴论中，我们经常遇到由多个方块拼接而成的图。一个基本的观察是：一对相邻方块的交换性，显然蕴含了外部矩形的交换性。但反过来，外部矩形的交换性一般并不蕴含内部方块的交换性。

这意味着，即使我们知道整个大矩形是交换的，也不能直接推断出它内部的两个小方块各自都是交换的。我们给出一个例子：

例 5.24. 考虑在 $\mathbf{Ab}$ 中的如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbb{Z}} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

我们来验证：1. 外部矩形交换：从左上角 $\mathbb{Z}$ 到右下角 $\mathbb{Z}$ ，有两条路径：上-右路径： $\mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ ，复合为零同态。下-右路径： $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$ ，复合也为零同态。因此，外部矩形是交换的。

2. 内部方块不都交换：左方块：从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ ，一条路径是 $\mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$ （复合为 $1_{\mathbb{Z}}$ ），另一条路径是 $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ （复合为 0）。由于 $1_{\mathbb{Z}} \neq 0$ ，左方块不交换。右方块：从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ ，一条路径是 $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ （复合为 0），另一条路径是 $\mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$ （复合为 $1_{\mathbb{Z}}$ ）。由于 $0 \neq 1_{\mathbb{Z}}$ ，右方块也不交换。

这个例子明确地表明，外部矩形交换并不意味着内部方块交换。

更进一步，即使我们知道其中一个内部方块和外部矩形都是交换的，一般也不能推出另一个内部方块是交换的。

例 5.25. 在集合范畴 $\mathbf{Set}$ 中，考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} \{a\} & \xrightarrow{f} & \{b, c\} & \xrightarrow{j} & \{d\} \\ g \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow \ell \\ \{a\} & \xrightarrow{k} & \{b, c\} & \xrightarrow{m} & \{d\} \end{array}$$

其中各态射定义为：

- ▶ $f : \{a\} \rightarrow \{b, c\}$, $f(a) = b$;
- ▶ $g : \{a\} \rightarrow \{a\}$, $g(a) = a$;
- ▶ $h : \{b, c\} \rightarrow \{b, c\}$, $h(b) = b$, $h(c) = c$ (恒等函数);
- ▶ $j : \{b, c\} \rightarrow \{d\}$, $j(b) = d$, $j(c) = d$ (常值函数);

- ▶ $k : \{a\} \rightarrow \{b, c\}, k(a) = c$;
- ▶ $m : \{b, c\} \rightarrow \{d\}, m(b) = d, m(c) = d$ (常值函数);
- ▶ $\ell : \{d\} \rightarrow \{d\}, \ell(d) = d$ (恒等函数).

显然，外面和右边都交换，左边那个正方形不交换。下面这个引理告诉了我们补充什么条件：

引理 5.26 (1.6.21). 考虑如下态射图：

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{j} & c \\ \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow \ell \\ a' & \xrightarrow{k} & b' & \xrightarrow{m} & c' \end{array}$$

并假设外部矩形是交换的，即 $\ell j f = m k g$ 。那么，在以下两种情形之一成立时，整个图（即两个内部方块）都是交换的：

1. 右侧方块交换（即 $\ell j = m h$ ），且态射 m 是单态射；或
2. 左侧方块交换（即 $h f = k g$ ），且态射 f 是满态射。

证明. 我们证明情形 (i)，情形 (ii) 是其对偶。

假设右侧方块交换，即 $\ell j = m h$ ，且 m 是单态射。由外部矩形交换，我们有：

$$m k g = \ell j f.$$

由右侧方块交换，我们有：

$$\ell j f = (m h) f = m(h f).$$

将两式联立，得到：

$$m k g = m(h f).$$

由于 m 是单态射（左可消去），我们可以从等式两边消去 m ，得到：

$$k g = h f.$$

这正是左侧方块交换的条件。因此，左侧方块也交换，整个图是交换的。 □

6.1 函子范畴与自然变换的垂直复合

6.1.1 函子范畴

在法语中，自然变换 (natural transformation) 被称为 *morphisme de foncteurs*——“函子之间的态射”。这个名称本身就强烈暗示了：对于任意一对固定的范畴 C 和 D ，我们可以构造一个新的范畴，其中：对象是从 C 到 D 的函子 $F : C \rightarrow D$ ；态射是这些函子之间的自然变换 $\alpha : F \Rightarrow G$ 。

这个新范畴被称为函子范畴 (functor category)，记作 D^C 。

当然，按照范畴的定义，要使 D^C 成为一个严格的范畴，我们必须定义其中态射（即自然变换）的复合规则。这引出了自然变换的第一种复合方式：垂直复合 (vertical composition)。

定义 6.1 (垂直复合). 设 $F, G, H : C \rightarrow D$ 是三个函子，且

$$\alpha : F \Rightarrow G, \quad \beta : G \Rightarrow H$$

是两个自然变换。我们定义它们的垂直复合

$$\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$$

为一个新的自然变换，其在任意对象 $C \in \text{Ob}(C)$ 处的分量由下式给出：

$$(\beta \circ \alpha)_C = \beta_C \circ \alpha_C : F(C) \rightarrow H(C).$$

证明. 我们需要验证 $\beta \circ \alpha$ 确实是一个自然变换，即对任意态射 $f : C \rightarrow C'$ ，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{(\beta \circ \alpha)_C} & H(C) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow H(f) \\ F(C') & \xrightarrow{(\beta \circ \alpha)_{C'}} & H(C') \end{array}$$

现在我们来证明一下这个图交换。

根据定义， $(\beta \circ \alpha)_C = \beta_C \circ \alpha_C$ ， $(\beta \circ \alpha)_{C'} = \beta_{C'} \circ \alpha_{C'}$ 。由于 α 和 β 本身都是自然变换，我们有：

$$\begin{array}{ccccc} F(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & G(C) & \xrightarrow{\beta_C} & H(C) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & G(C') & \xrightarrow{\beta_{C'}} & H(C') \end{array}$$

两个内部方块都交换，因此外部矩形也交换，即 $H(f) \circ (\beta_C \circ \alpha_C) = (\beta_{C'} \circ \alpha_{C'}) \circ F(f)$ 。这就证明了 $\beta \circ \alpha$ 的自然性。□

定义好复合后，我们还需要考虑函子范畴里其他的要素。

(1) 单位元：对于任意函子 $F : C \rightarrow D$ ，存在恒等自然变换 $1_F : F \Rightarrow F$ ，其分量为 $(1_F)_C = 1_{F(C)}$ 。

极其显然的，恒等自然变换在垂直复合中确实是起到单位元的作用（还是按照上面的交换图画一下即可）。

(2) 结合律：结合律是显然的（只需要把交换图画出来即可）。

现在唯一的问题就在函子范畴的“size”这里。如果按照 Emily Riehl 一书的要求，那现在我们已经证明了上述 data 确实构成一个范畴；但是如果我们要求范畴里的“态射集”必须是一个集合的话，那么我们就还需要加一些限制条件，才能保证上述 data 构成一个范畴。我们用一个命题描述这个事情：

命题 6.2. 设 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{C}$ 为两个范畴，则有下面两个结论：

- ▶ 如果 $\mathcal{J}$ 是一个小范畴，则从 $\mathcal{J}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子，以及它们之间的自然变换作为态射，构成一个范畴，称为函子范畴，记为 $\text{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ 。
- ▶ 如果 $\mathcal{C}$ 也是小范畴，则 $\text{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ 是小范畴。

也就是说，*domain* 所在的范畴如果是小的，则函子范畴是局部小的；如果 *codomain* 也是小的，则函子范畴是小的。

证明. 我们现在只需要关注态射集的大小。

(1) 注意到 $\bigcup_{i \in \text{Ob } \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), G(i))$ 是由另一个集合（即 $\text{Ob } \mathcal{J}$ ）索引的集合的并，因此它本身也是一个集合。

(2) 注意到对任意两个函子 $F, G : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ，一个自然变换 $\eta : F \rightarrow G$ ，就是给每个对象 $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ，唯一地分配一个态射 $\eta_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), G(i))$ ，并且这些态射要满足自然性条件。也就是说，所有从 F 到 G 的自然变换构成的类是 $\text{Ob } \mathcal{J} \times \bigcup_{i \in \text{Ob } \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), G(i))$ 的一个子集。因此，任意两个函子 $F, G : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 之间的自然变换构成一个集合，证明完毕。□

注 6.3. 这里用到了一点点的 ZFC 公理体系。

6.1.2 例子：预层范畴和层范畴

函子范畴的一个经典例子就是预层范畴（category of presheaves）。而层范畴不过是预层范畴的满子范畴。我们来详细讲解一下这两个范畴。

设 X 为拓扑空间。 X 上的一个阿贝尔群预层 $\mathcal{F}$ 由下列数据组成：

- (a) 对每个非空开集 $U \subseteq X$ ，给定一个阿贝尔群 $\mathcal{F}(U)$ ，其元素称为 U 上的截面；
- (b) 对每个包含 $V \subseteq U$ ，给定限制同态

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V).$$

它们满足：

- (i) $\rho_{UU} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ ；
- (ii) 若 $W \subseteq V \subseteq U$ ，则

$$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}.$$

注 6.4. 对 $s \in \mathcal{F}(U)$ 与 $V \subseteq U$ ，通常把 $\rho_{UV}(s)$ 写作 $s|_V$ 。必要时可将截面记为 (s, U) ，以强调其定义域。

从范畴论的角度我们更容易描述预层这个概念。事实上，设 X 是一个拓扑空间，记 $\text{Open}(X)$ 为 X 的所有开子集构成的范畴，其中态射是开子集之间的包含映射 $V \hookrightarrow U$ 。当然，当两个开集没有包含关系时，相应的态射集就是空。 $\text{Open}(X)$ 称为开集范畴。

因此，一个阿贝尔群预层 $\mathcal{F}$ 就是一个反变函子：

$$\mathcal{F} : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}.$$

从范畴论的角度，我们自然会考虑两个预层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 之间的态射： $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ，就是一族阿贝尔群同态 $\{\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)\}_{U \subset X}$ ，使得对任意包含关系 $V \hookrightarrow U$ ，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

这就是两个反变函子之间的自然变换。

因此，拓扑空间 X 上的阿贝尔群预层范畴 $\text{AbPreSh}(X)$ ，就是函子范畴

$$\text{Ab}^{\text{Open}(X)^{\text{op}}}.$$

其中的对象是反变函子（预层），态射是这些函子之间的自然变换（预层态射）。

现在考虑层的定义。设 $U = \bigcup_i U_i$ 是拓扑空间 X 的开覆盖， $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ （其中 $\mathcal{F}$ 为预层）。所谓的层不过是一个满足下面两个条件的预层：

- (i) 若 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ ，且开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$ 满足对一切 i 有 $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ ，则 $s = t$ ；
- (ii) 若 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 U 的开覆盖，且 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 满足

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

则存在 $s \in \mathcal{F}(U)$ 使 $s|_{U_i} = s_i$ ；由 (i) 此截面唯一。

这意味着层之间的态射与预层之间的态射是完全相同的，只是我们对对象额外施加了限制，因此层 (sheaf) 范畴确实是预层范畴的一个满子范畴。

6.2 自然变换的复合与函子范畴

6.2.1 自然变换的胡须化

胡须化涉及三个函子，其中有两个函子之间存在自然变换。严格的构造如下：

设 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 、 $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 为函子， $\alpha : F \Rightarrow G$ 为自然变换。其位置关系为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \alpha \\ \xrightarrow{G} \end{array} & \mathcal{D} \\ & \searrow HF & \downarrow H \\ & & \mathcal{E} \end{array}$$

定义右胡须化 $H\alpha : HF \Rightarrow HG$ ：

$$(H\alpha)_C = H(\alpha_C) \quad (C \in \text{Ob } \mathcal{C}),$$

这称为以 H 对 α 作右胡须化。

同样，设 $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ，则左胡须化的位置关系为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{K} & \mathcal{C} \\ & \searrow GK & \downarrow \text{||||} \\ & & \mathcal{D} \\ & \swarrow FK & \downarrow \text{||||} \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

定义左胡须化 $\alpha K : FK \Rightarrow GK$ ：

$$(\alpha K)_B = \alpha_{K(B)} \quad (B \in \text{Ob } \mathcal{B}),$$

这称为以 K 对 α 作左胡须化。

我们当然需要证明上面定义的态射族确实构成了一个自然变换。下面给出右胡须化的证明（左胡须化的 case 是一样的）。

证明. A family of morphisms $\{\beta_C : HF(C) \rightarrow HG(C)\}_{C \in \text{Ob } \mathcal{C}}$ is a natural transformation if and only if for any morphism $f : C \rightarrow C'$ in $\mathcal{C}$, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} HF(C) & \xrightarrow{HF(f)} & HF(C') \\ \beta_C \downarrow & & \downarrow \beta_{C'} \\ HG(C) & \xrightarrow{HG(f)} & HG(C') \end{array}$$

that is: $HG(f) \circ \beta_C = \beta_{C'} \circ HF(f)$.

Substitute $\beta_C = (H\alpha)_C = H(\alpha_C)$, we need to verify:

$$HG(f) \circ H(\alpha_C) = H(\alpha_{C'}) \circ HF(f)$$

Using the property of functor H (functors preserve composition): $H(g \circ h) = H(g) \circ H(h)$, thus we have:

$$H(G(f)\alpha_C) = H(\alpha_{C'}F(f)) \text{ (这是要证明的)}$$

Since $\alpha : F \rightarrow G$ is a natural transformation, for $f : C \rightarrow C'$, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \alpha_C \downarrow & & \downarrow \alpha_{C'} \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

that is: $G(f)\alpha_C = \alpha_{C'}F(f)$. 命题得证。 □

6.2.2 自然变换的横向复合

上面描述的自然变换胡须化的例子，都是一个更一般构造——称为 **Godement 积**或自然变换的**横向复合**——的特殊情况。

设 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 、 $H, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ ，以及自然变换

$$\alpha : F \Rightarrow G, \quad \beta : H \Rightarrow K.$$

横向复合 $\beta * \alpha : HF \Rightarrow KG$ 的分量为

$$(\beta * \alpha)_C = \beta_{G(C)} \circ H(\alpha_C) = K(\alpha_C) \circ \beta_{F(C)}.$$

和前面一样，我们当然需要证明这样定义的态射族确实是一个自然变换。

证明. 先对态射 $\alpha_C : F(C) \rightarrow G(C)$ 使用 β 的自然性，得到交换图

$$\begin{array}{ccc} HF(C) & \xrightarrow{\beta_{F(C)}} & KF(C) \\ H(\alpha_C) \downarrow & & \downarrow K(\alpha_C) \\ HG(C) & \xrightarrow{\beta_{G(C)}} & KG(C) \end{array} \quad \text{i.e., } \beta_{G(C)} \circ H(\alpha_C) = K(\alpha_C) \circ \beta_{F(C)}.$$

因此对每个 $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ，有

$$(\beta * \alpha)_C = \beta_{G(C)} \circ H(\alpha_C) = K(\alpha_C) \circ \beta_{F(C)}.$$

Let $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$; showing that $\beta * \alpha$ is a natural transformation comes down to proving the commutativity of the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} HF(C) & \xrightarrow{\beta_{G(C)} \circ H(\alpha_C)} & KG(C) \\ HF(f) \downarrow & & \downarrow KG(f) \\ HF(C') & \xrightarrow{\beta_{G(C')} \circ H(\alpha_{C'})} & KG(C') \end{array} \quad (1)$$

To this end, the naturality of α and functoriality of H render the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccc} HF(C) & \xrightarrow{H(\alpha_C)} & HG(C) \\ HF(f) \downarrow & & \downarrow HG(f) \\ HF(C') & \xrightarrow{H(\alpha_{C'})} & HG(C') \end{array} \quad \text{i.e., } HG(f) \circ H(\alpha_C) = H(\alpha_{C'}) \circ HF(f). \quad (2)$$

又由 β 的自然性，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} HG(C) & \xrightarrow{\beta_{G(C)}} & KG(C) \\ HG(f) \downarrow & & \downarrow KG(f) \\ HG(C') & \xrightarrow{\beta_{G(C')}} & KG(C') \end{array} \quad \text{即 } \beta_{G(C')} \circ HG(f) = KG(f) \circ \beta_{G(C)}. \quad (3)$$

合并以上等式，得到

$$\begin{aligned} \beta_{G(C')} \circ H(\alpha_{C'}) \circ HF(f) &\stackrel{(2)}{=} \beta_{G(C')} \circ HG(f) \circ H(\alpha_C) \\ &\stackrel{(3)}{=} KG(f) \circ \beta_{G(C)} \circ H(\alpha_C), \end{aligned}$$

这正是 (1)，从而证明完成。 $\square$

我们很容易看出来，自然变换的胡须化操作本质上是横向复合（Godement 积）的特殊情况：

1. **右胡须化**: $H\alpha = 1_H * \alpha$, 其中 $1_H : H \rightarrow H$ 是函子 H 的恒等自然变换;
2. **左胡须化**: $\alpha K = \alpha * 1_K$, 其中 $1_K : K \rightarrow K$ 是函子 K 的恒等自然变换。

这表明, 胡须化并非独立的复合方式, 而是横向复合在其中一个自然变换退化为恒等变换时的情况。

6.3 中间四交换引理

垂直复合与横向复合可以按任意顺序进行, 且满足中间四交换律 (middle four interchange rule):

引理 6.5 (1.7.7, 中间四交换律). 设有函子与自然变换如下图所示:

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{J} \\ \xrightarrow{K} \\ \xrightarrow{L} \end{array} \mathcal{E}$$

即有函子:

$$F, G : C \rightarrow D, \quad H : C \rightarrow D, \quad J, K : D \rightarrow E, \quad L : D \rightarrow E$$

与自然变换:

$$\alpha : F \Rightarrow G, \quad \beta : H \Rightarrow G, \quad \gamma : J \Rightarrow K, \quad \delta : L \Rightarrow K.$$

则先垂直复合再横向复合得到的自然变换 $JF \Rightarrow LH$, 与先横向复合再垂直复合得到的自然变换相等:

$$(\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha) = (\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha).$$

也即下列两种复合给出同一条 2-态射:

$$\begin{array}{ccc} JF & \xrightarrow{\gamma * \alpha} & KG \\ J * \beta \downarrow & & \downarrow \delta * G \\ JH & \xrightarrow{\gamma * H} & KH \end{array}$$

注 6.6. 注意, 图中的 “.” 和我们定理描述时用的 $\circ$ 是同一个东西, 都是表示竖直复合。

证明. 先利用自然变换 γ , 然后再用 δ 。关键就是 (1), 剩下的三个和 (1) 一模一样。

(1) 利用 γ 的自然性 (把 α 当做态射): 我们先利用自然变换 γ , 作用于态射 $\alpha_C : F(C) \rightarrow G(C)$ 。即对任意 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, γ 的自然性给出交换图:

$$\begin{array}{ccc} JF(C) & \xrightarrow{J(\alpha_C)} & JG(C) \\ \gamma_{F(C)} \downarrow & & \downarrow \gamma_{G(C)} \\ KF(C) & \xrightarrow{K(\alpha_C)} & KG(C) \end{array}$$

对应的等式: $\gamma_{G(C)} \circ J(\alpha_C) = K(\alpha_C) \circ \gamma_{F(C)}$

(2) 还是利用 γ 的自然性 (把 β_C 当做态射): 和 (1) 中完全一样, 对任意 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, γ 的自然性给出交换图:

$$\begin{array}{ccc} JG(C) & \xrightarrow{J(\beta_C)} & JH(C) \\ \gamma_{G(C)} \downarrow & & \downarrow \gamma_{H(C)} \\ KG(C) & \xrightarrow{K(\beta_C)} & KH(C) \end{array}$$

对应的等式: $\gamma_{H(C)} \circ J(\beta_C) = K(\beta_C) \circ \gamma_{G(C)}$.

(3) 利用 δ 的自然性 (作用于 α_C 态射): 对任意 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, δ 关于 α_C 的自然性给出交换图:

$$\begin{array}{ccc} KF(C) & \xrightarrow{K(\alpha_C)} & KG(C) \\ \delta_{F(C)} \downarrow & & \downarrow \delta_{G(C)} \\ LF(C) & \xrightarrow{L(\alpha_C)} & LG(C) \end{array}$$

对应的等式: $\delta_{G(C)} \circ K(\alpha_C) = L(\alpha_C) \circ \delta_{F(C)}$.

(4) δ 的自然性交换图 (作用于 β_C 态射): 对任意 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, δ 关于 β_C 的自然性给出交换图:

$$\begin{array}{ccc} KG(C) & \xrightarrow{K(\beta_C)} & KH(C) \\ \delta_{G(C)} \downarrow & & \downarrow \delta_{H(C)} \\ LG(C) & \xrightarrow{L(\beta_C)} & LH(C) \end{array}$$

对应的等式: $\delta_{H(C)} \circ K(\beta_C) = L(\beta_C) \circ \delta_{G(C)}$.

(5) 将上面四个自然性交换图拼接为一个交换图 (我们知道, 只要内部交换, 则外部也是交换的, 所以这个拼接后的图一定还是交换图):

$$\begin{array}{ccccccc} JF(C) & \xrightarrow{J(\alpha_C)} & JG(C) & \xrightarrow{J(\beta_C)} & JH(C) \\ \gamma_{F(C)} \downarrow & & \downarrow \gamma_{G(C)} & & \downarrow \gamma_{H(C)} \\ KF(C) & \xrightarrow{K(\alpha_C)} & KG(C) & \xrightarrow{K(\beta_C)} & KH(C) \\ \delta_{F(C)} \downarrow & & \downarrow \delta_{G(C)} & & \downarrow \delta_{H(C)} \\ LF(C) & \xrightarrow{L(\alpha_C)} & LG(C) & \xrightarrow{L(\beta_C)} & LH(C) \end{array}$$

我们要证明命题里的式子 $(\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha) = (\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha)$ 成立, 只需要证明它的左右两边的自然变换的分量相同。

我们考虑交换图里这样的两条路径:

(1) 路径 1: 见下图 (实线部分)

$$\begin{array}{ccccc}
 JF(C) & \xrightarrow{\quad J(\alpha_C) \quad} & JG(C) & \xrightarrow{\quad J(\beta_C) \quad} & JH(C) \\
 \downarrow \gamma_{F(C)} & & \downarrow \gamma_{G(C)} & & \downarrow \gamma_{H(C)} \\
 KF(C) & \xrightarrow{\quad K(\alpha_C) \quad} & KG(C) & \xrightarrow{\quad K(\beta_C) \quad} & KH(C) \\
 \downarrow \delta_{F(C)} & & \downarrow \delta_{G(C)} & & \downarrow \delta_{H(C)} \\
 LF(C) & \xrightarrow{\quad L(\alpha_C) \quad} & LG(C) & \xrightarrow{\quad L(\beta_C) \quad} & LH(C)
 \end{array}$$

事实上, 这个路径就是左边自然变换的分量:

$$\begin{aligned}
 (\delta * \beta)_C \circ (\gamma * \alpha)_C &= (\delta_{H(C)} \circ K(\beta_C)) \circ (K(\alpha_C) \circ \gamma_{F(C)}) \text{ (两种复合的定义)} \\
 &= \delta_{H(C)} \circ K(\beta_C) \circ K(\alpha_C) \circ \gamma_{F(C)}
 \end{aligned}$$

(2) 路径 2 (虚线部分):

$$\begin{array}{ccccc}
 JF(C) & \xrightarrow{\quad J(\alpha_C) \quad} & JG(C) & \xrightarrow{\quad J(\beta_C) \quad} & JH(C) \\
 \downarrow \gamma_{F(C)} & & \downarrow \gamma_{G(C)} & & \downarrow \gamma_{H(C)} \\
 KF(C) & \xrightarrow{\quad K(\alpha_C) \quad} & KG(C) & \xrightarrow{\quad K(\beta_C) \quad} & KH(C) \\
 \downarrow \delta_{F(C)} & & \downarrow \delta_{G(C)} & & \downarrow \delta_{H(C)} \\
 LF(C) & \xrightarrow{\quad L(\alpha_C) \quad} & LG(C) & \xrightarrow{\quad L(\beta_C) \quad} & LH(C)
 \end{array}$$

事实上, 这个路径就是右边自然变换的分量 (还是按照定义写出来即可):

$$\begin{aligned}
 ((\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha))_C &= L(\beta_C \circ \alpha_C) \circ (\delta \circ \gamma)_{F(C)} \\
 &= L(\beta_C) \circ L(\alpha_C) \circ \delta_{F(C)} \circ \gamma_{F(C)}
 \end{aligned}$$

由于是交换图, 所以这两个路径当然是等价的。也就是说左右两边的自然变换的分量都相等, 因此是同一个自然变换。 $\square$

6.4 2-范畴的严格定义

2-范畴的一个重要要求就是中间四交换引理。

定义 6.7 (1.7.8, 2-范畴). 一个 2-范畴 (2-category) $\mathbb{C}$ 由以下数据和公理构成:

(1) 数据:

1. 对象类 (0-胞腔, 0-cells): 记为 $\text{Ob}(\mathbb{C})$, 元素称为 2-范畴的对象 (例如范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$);
2. 1-态射类 (1-胞腔, 1-cells): 对任意一对对象 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$, 存在一个类 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}^1(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 其

元素称为从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的 1-态射 (记为 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 例如函子);

3. 2-态射类 (2-胞腔, 2-cells): 对任意一对平行 1-态射 $F, G \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 存在一个类 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^2(F, G)$, 其元素称为从 F 到 G 的 2-态射 (记为 $\alpha: F \Rightarrow G$, 例如自然变换)。

(2) 复合运算:

1. 1-态射的复合: 对任意 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$, 存在复合 1-态射 $G \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$;
2. 2-态射的垂直复合: 对任意平行 1-态射 $F \xRightarrow{\alpha} G \xRightarrow{\beta} H$, 存在复合 2-态射 $\beta \circ_v \alpha: F \Rightarrow H$;
3. 2-态射的水平复合: 对任意 1-态射 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{J} \mathcal{E}$ 和 $\mathcal{C} \xrightarrow{G} \mathcal{D} \xrightarrow{K} \mathcal{E}$, 以及 2-态射 $\alpha: F \Rightarrow G$, $\gamma: J \Rightarrow K$, 存在复合 2-态射 $\gamma \circ_h \alpha: J \circ F \Rightarrow K \circ G$ (即 Godement 积)。

(3) 公理: 我们要求上述 data 和复合运算满足如下公理:

1. 1-范畴公理: 对象与 1-态射构成一个普通范畴, 即:
 - ▶ 1-态射的复合满足结合律: $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$;
 - ▶ 每个对象 $\mathcal{C}$ 有单位 1-态射 $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 满足 $1_{\mathcal{D}} \circ F = F = F \circ 1_{\mathcal{C}}$ 。
2. 2-态射的垂直范畴公理: 对任意固定对象 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中的 1-态射与它们之间的 2-态射, 在 2-态射的垂直复合下构成一个普通范畴 (称为 “同态范畴”), 即:
 - ▶ 2-态射的垂直复合满足结合律: $(\gamma \circ_v \beta) \circ_v \alpha = \gamma \circ_v (\beta \circ_v \alpha)$;
 - ▶ 每个 1-态射 F 有单位 2-态射 $1_F: F \Rightarrow F$, 满足 $1_G \circ_v \alpha = \alpha = \alpha \circ_v 1_F$ 。
3. 2-态射的水平范畴公理: 同样存在一个范畴, 其对象就是 0 胞腔, 从对象 C 到 D 的态射是一个 2-胞腔, 在水平复合下构成范畴, 其恒等态射是 id_{1_C} 。也就是说:
 - ▶ 水平复合满足结合律: $(\delta \circ_h \gamma) \circ_h (\beta \circ_h \alpha) = \delta \circ_h (\gamma \circ_h \beta) \circ_h \alpha$;
 - ▶ 每个对象 $\mathcal{C}$ 有单位 2-态射 $1_{1_{\mathcal{C}}}: 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$, 满足 $1_{1_{\mathcal{D}}} \circ_h \alpha = \alpha = \alpha \circ_h 1_{1_{\mathcal{C}}}$ 。
4. 单位相容性: 单位 2-态射的水平复合等于复合 1-态射的单位 2-态射, 即:

$$1_H \circ_h 1_F = 1_{H \circ F}.$$

5. 中间四交换律: 2-态射的垂直复合与水平复合满足交换律:

$$(\delta \circ_v \gamma) \circ_h (\beta \circ_v \alpha) = (\delta \circ_h \beta) \circ_v (\gamma \circ_h \alpha).$$

(即中间四交换律)

注意, 这里的垂直范畴和水平范畴态射是一样的, 都是 2-胞腔 (或者叫做 2 态射), 但是对象是不一样的。

垂直范畴里面对象是某两个对象 (0 胞腔) 之间的 1-态射, 而水平范畴里的对象, 直接就是 0-胞腔。

7 极限与余极限

7.1 锥、余锥与泛性质

7.1.1 常值函子、锥与余锥

先回顾定义锥所需的常值函子。

定义 7.1 (常值函子). 对 $c \in \mathcal{C}$ 与范畴 $\mathbf{J}$, 以 c 为值的**常值函子** $\underline{c} : \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 定义为:

- ▶ 对每个对象 $j \in \mathbf{J}$, 有 $\underline{c}(j) = c$;
- ▶ 对每个态射 $g : j \rightarrow k$, 有 $\underline{c}(g) = \text{id}_c$ 。

常值函子的赋值给出函子

$$\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{J}},$$

它将 c 送至 $\underline{c}$, 并将 $f : c \rightarrow c'$ 送至每个分量都为 f 的**常值自然变换** $\Delta(f) : \underline{c} \Rightarrow \underline{c'}$ 。

其自然性只需由自然变换的定义直接验证。

定义 7.2 (自然变换). 设 $F, G : \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 。自然变换 $\alpha : F \Rightarrow G$ 包含:

1. 对每个 $j \in \mathbf{J}$, 一个分量 $\alpha_j : F(j) \rightarrow G(j)$;
2. 对每个 $g : j \rightarrow k$, 自然性方块交换:

$$\begin{array}{ccc} F(j) & \xrightarrow{\alpha_j} & G(j) \\ F(g) \downarrow & & \downarrow G(g) \\ F(k) & \xrightarrow{\alpha_k} & G(k) \end{array}$$

即 $G(g) \circ \alpha_j = \alpha_k \circ F(g)$ 。

令 $F = \underline{c}, G = \underline{c'}$, 自然性说明:

- ▶ 对一切 j, k, g , 有 $F(j) = F(k) = c$ 及 $F(g) = \text{id}_c$;
- ▶ 对一切 j, k, g , 有 $G(j) = G(k) = c'$ 及 $G(g) = \text{id}_{c'}$ 。

自然性方块化为:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\alpha_j} & c' \\ \text{id}_c \downarrow & & \downarrow \text{id}_{c'} \\ c & \xrightarrow{\alpha_k} & c' \end{array}$$

交换性要求

$$\text{id}_{c'} \circ \alpha_j = \alpha_k \circ \text{id}_c,$$

故 $\alpha_j = \alpha_k$ 。于是所有分量必须是同一个态射。

因此 $\underline{c} \Rightarrow \underline{c'}$ 的自然变换恰为常值自然变换, 这验证了 Δ 的定义。

锥 有了常值函子即可定义极限的基本对象。

定义 7.3 (锥). 图表 $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ 上、顶点为 $c \in \mathcal{C}$ 的**锥**是自然变换 $\lambda : \underline{c} \Rightarrow F$ 。其分量 $(\lambda_j : c \rightarrow F(j))_{j \in J}$ 称为**锥的支**。

具体地说，它满足：

1. 一族态射 $\lambda_j : c \rightarrow F(j)$;
2. 每个 $f : j \rightarrow k$ 对应的三角交换：

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \lambda_j \swarrow & & \searrow \lambda_k \\ F(j) & \xrightarrow{F(f)} & F(k) \end{array} \quad (3.1.3)$$

$$\text{即 } F(f) \circ \lambda_j = \lambda_k.$$

这正是 λ 的自然性。

余锥 对偶地得到余极限的基本对象。

定义 7.4 (余锥). 图表 $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ 下、底点为 $c \in \mathcal{C}$ 的**余锥**是自然变换 $\lambda : F \Rightarrow \underline{c}$ ，其分量 $(\lambda_j : F(j) \rightarrow c)_{j \in J}$ 称为**余锥的支**。

对每个 $f : j \rightarrow k$ ，自然性要求下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(j) & \xrightarrow{F(f)} & F(k) \\ & \searrow \lambda_j & \swarrow \lambda_k \\ & c & \end{array}$$

$$\text{即 } \lambda_k \circ F(f) = \lambda_j.$$

注 7.5. 余锥也称为**余锥** (cocone)。它等价于对偶范畴中 $F : J^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ 的锥，体现了极限与余极限的对偶性。

当指标范畴为 $\mathbb{Z}$ 的偏序范畴时，锥与余锥分别具有下列形状：

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \lambda_{-1} \swarrow & \downarrow \lambda_0 & \searrow \lambda_1 \\ F(-1) & \rightarrow & F(0) \rightarrow F(1) \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} F(-1) & \rightarrow & F(0) & \rightarrow & F(1) \\ & \searrow \lambda_{-1} & \downarrow \lambda_0 & \swarrow \lambda_1 & \\ & & c & & \end{array}$$

7.2 可表性与极限

7.2.1 可表性与锥函子

定义 7.6 (可表对象). 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴， $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ 为共变函子，或 $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 为反变函子。

1. 若 F 是共变函子， F 的一个**表示 (representation)** 是一对 (c, α) ，其中 $c \in \mathcal{C}$ 为对象， $\alpha : \mathcal{C}(c, -) \cong F$ 为自然同构，此时称 c 为 F 的**可表对象**；
2. 若 F 是反变函子， F 的一个**表示 (representation)** 是一对 (c, α) ，其中 $c \in \mathcal{C}$ 为对象， $\alpha :$

$\mathcal{C}(-, c) \cong F$ 为自然同构, 此时称 c 为 F 的**可表对象**。

米田引理

引理 7.7 (米田引理 (Yoneda Lemma)). 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴, $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 为任意反变函子, $U \in \mathcal{C}$ 为任意对象, 则存在自然双射

$$\text{Mor}_{\text{PSh}(\mathcal{C})}(h_U, F) \xrightarrow{\cong} F(U), \quad s \mapsto s_U(\text{id}_U)$$

其中 $h_U = \mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 是由 U 确定的反变同态函子, $\text{Mor}_{\text{PSh}(\mathcal{C})}(h_U, F)$ 是预层范畴中从 h_U 到 F 的自然变换集合。

锥函子 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴, $\mathcal{J}$ 为小范畴 (指标范畴), $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{J}$ -型图 (diagram)。

定义 7.8 (锥函子 $\text{Cone}(-, F)$). 我们定义反变函子 $\text{Cone}(-, F) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 如下:

1. **对对象的作用:** 对任意对象 $c \in \mathcal{C}$, $\text{Cone}(c, F)$ 是以 c 为顶点、以 F 为底的锥的集合。一个锥 $\lambda : c \Rightarrow F$ 是一族态射 $\{\lambda_j : c \rightarrow F(j)\}_{j \in \text{ob}(\mathcal{J})}$, 满足交换性条件: 对 $\mathcal{J}$ 中任意态射 $f : j \rightarrow k$, 有 $F(f) \circ \lambda_j = \lambda_k$ 。
2. **对态射的作用:** 对任意态射 $g : d \rightarrow c$ (对应 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的态射 $g : c \rightarrow d$), 定义映射

$$\text{Cone}(g, F) : \text{Cone}(c, F) \rightarrow \text{Cone}(d, F)$$

为: 任取锥 $\lambda = \{\lambda_j : c \rightarrow F(j)\} \in \text{Cone}(c, F)$, 其像为新锥 $\mu = \{\mu_j : d \rightarrow F(j)\}$, 其中

$$\mu_j := \lambda_j \circ g, \quad \forall j \in \text{ob}(\mathcal{J})$$

注 7.9. 上述定义满足函子性:

- ▶ 保单位态射: $\text{Cone}(\text{id}_c, F) = \text{id}_{\text{Cone}(c, F)}$;
- ▶ 保复合: 对任意 $g : d \rightarrow c, h : e \rightarrow d$, 有 $\text{Cone}(g \circ h, F) = \text{Cone}(h, F) \circ \text{Cone}(g, F)$ 。

因此 $\text{Cone}(-, F)$ 是良定义的反变函子, 称为图 F 的**锥函子**。

7.2.2 极限的泛性质

定义 7.10 (极限 (limit)). 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴, $\mathcal{J}$ 为小范畴, $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{J}$ -型图。图 F 的**极限**定义为反变锥函子 $\text{Cone}(-, F) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 的一个可表对象。

由米田引理, 该表示唯一对应一个以 $\lim F \in \mathcal{C}$ 为顶点的泛锥 (universal cone) $\lambda : \lim F \Rightarrow F$, 称为**极限锥**。

极限锥

命题 7.11 (极限锥的泛性质). 设 $\lambda : \lim F \Rightarrow F$ 是图 F 的极限锥, 则对任意以 $c \in \mathcal{C}$ 为顶点的锥 $\mu : c \Rightarrow F$, 存在唯一的态射 $f : c \rightarrow \lim F$, 使得对所有 $j \in \text{ob}(\mathcal{J})$, 有 $\lambda_j \circ f = \mu_j$ 。

证明. 由极限的定义, $\lim F$ 是锥函子 $\text{Cone}(-, F)$ 的可表对象, 即存在自然同构

$$\alpha : \mathcal{C}(-, \lim F) \cong \text{Cone}(-, F)$$

对任意对象 $c \in \mathcal{C}$, α 诱导双射

$$\alpha_c : \mathcal{C}(c, \lim F) \xrightarrow{\cong} \text{Cone}(c, F)$$

任取锥 $\mu \in \text{Cone}(c, F)$, 由双射的满射性, 存在唯一的态射 $f \in \mathcal{C}(c, \lim F)$ 使得 $\alpha_c(f) = \mu$.

另一方面, 由米田引理, 自然同构 α 唯一对应 $\text{Cone}(-, F)$ 在 $\lim F$ 处的元素 $\lambda = \alpha_{\lim F}(\text{id}_{\lim F}) \in \text{Cone}(\lim F, F)$, 即极限锥。对任意态射 $f : c \rightarrow \lim F$, 由自然性, 下图交换:

相应的自然性方块为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, \lim F) & \xrightarrow{\alpha_c} & \text{Cone}(c, F) \\ f^* \downarrow & & \downarrow \text{Cone}(f, F) \\ \mathcal{C}(\lim F, \lim F) & \xrightarrow{\alpha_{\lim F}} & \text{Cone}(\lim F, F). \end{array}$$

将 $\text{id}_{\lim F} \in \mathcal{C}(\lim F, \lim F)$ 代入交换图, 得

$$\alpha_c(f) = \alpha_c(f^*(\text{id}_{\lim F})) = \text{Cone}(f, F)(\alpha_{\lim F}(\text{id}_{\lim F})) = \text{Cone}(f, F)(\lambda)$$

而由锥函子对态射的作用, $\text{Cone}(f, F)(\lambda) = \{\lambda_j \circ f\}_{j \in \text{ob}(\mathcal{J})}$, 因此 $\alpha_c(f) = \mu$ 等价于对所有 $j \in \text{ob}(\mathcal{J})$, $\lambda_j \circ f = \mu_j$.

综上, 满足条件的态射 f 存在且唯一。 $\square$

利用泛性质, 我们可以把极限定义为一种终对象, 我们在锥范畴里考虑这件事情。

定义 7.12 (锥范畴 $\int \text{Cone}(-, F)$). 设 $\mathcal{C}$ 为局部小范畴, $\mathcal{J}$ 为小范畴, $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{J}$ -型图, 我们定义图 F 上的锥范畴 (category of cones over F) 如下:

1. **对象**: 所有以任意 $c \in \mathcal{C}$ 为顶点、以 F 为底的锥 $\lambda : c \Rightarrow F$, 即一族满足交换性的态射 $\{\lambda_j : c \rightarrow F(j)\}_{j \in \text{ob}(\mathcal{J})}$, 对任意 $f : j \rightarrow k \in \mathcal{J}$ 有 $F(f) \circ \lambda_j = \lambda_k$.
2. **态射**: 从锥 $\lambda : c \Rightarrow F$ 到锥 $\mu : d \Rightarrow F$ 的态射, 是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : c \rightarrow d$, 满足对所有 $j \in \text{ob}(\mathcal{J})$, 有 $\mu_j \circ f = \lambda_j$.
3. **复合与单位**: 态射的复合由 $\mathcal{C}$ 中态射的复合给出, 单位态射为 $\mathcal{C}$ 中的恒等态射 id_c .

注 7.13. 锥范畴本质上是一个 ** 逗号范畴 (comma category) $(\Delta \downarrow F)$, 其中 $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 是对角函子 (将对象 c 映为常值图 Δc , 将态射 f 映为常值自然变换), F 视为 $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 中的对象。锥范畴的对象就是从 Δc 到 F 的自然变换 (即锥), 态射就是使得相应三角形交换的 $\mathcal{C}$ 中的态射, 与上述定义完全等价。

命题 7.14 (极限是锥范畴的终对象). 设 $\lambda : \lim F \Rightarrow F$ 是图 F 的极限锥, 则 λ 是锥范畴 $\int \text{Cone}(-, F)$ 中的终对象 (terminal object)。

证明. 证明是显然的。 $\square$

在这个观点下, 我们马上得到下面这个结果:

定理 7.15. 对同一图表 F 的任意两个极限锥 $\lambda : \ell \Rightarrow F$ 与 $\lambda' : \ell' \Rightarrow F$, 存在唯一同构 $\ell \cong \ell'$, 并且它与两组极限锥的支交换。

也就是说, 一个图的极限在同构的意义下是唯一的。这不过是终对象的性质而已 (一个范畴里的终对象都是同构的)。

注 7.16. 当一个图的极限存在时（比如我们假设图 1 里的 c 就是 F 的极限），我们可以把极限锥和原来的图合在一起，得到一个新图。新图的指标 (I) 和原来的图就差了一个极限。比如对于图一，原来的图只有下面这个线，现在可以考虑包含锥的整个图（这当然是一个图，因为交换）。这样的好处是，新图的指标范畴有了一个初对象（到任何其他对象，都有且仅有一个态射）。

7.3 基本极限

下面的这些定义，都是特殊的图上的极限。这些特殊的极限都是很重要的。

7.3.1 积与终对象

积 (product) 是由离散范畴（态射只有恒等态射）上的图所定义的极限。也就是说，我们的图 F 的指标范畴，现在退化为离散范畴（态射很少）。

事实上，以离散范畴 J 为指标的图 $F : j \rightarrow \mathcal{C}$ ，如果“画出来”就是一组由指标 $j \in J$ 标记的对象 $\{F_j\}_{j \in J}$ 。该图上的一个锥，就是由态射族 $(\lambda_j : c \rightarrow F_j)_{j \in J}$ （以 J 为指标）构成的，且没有其他约束。

此时的极限锥通常记作 $\prod_{j \in J} F_j$ ，而极限锥的“腿”（即投影态射）就是如下一族映射：

$$(\pi_k : \prod_{j \in J} F_j \rightarrow F_k)_{k \in J}$$

没有其他要求了（不一般的极限，还需要保证交换）。这类映射被称为（积）投影 ((product) projections)。

我们来看一个拓扑范畴里 product 的例子。

例 7.17. 设 X, Y 为拓扑空间，记集合笛卡尔积为

$$P = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

定义 7.18 (二元拓扑空间的乘积拓扑). $X \times Y$ 上的**乘积拓扑**，是由所有形如

$$U \times V, \quad \text{其中 } U \subseteq X \text{ 为 } X \text{ 中的开集, } V \subseteq Y \text{ 为 } Y \text{ 中的开集}$$

的集合作为拓扑基生成的拓扑。
等价地，乘积拓扑的开集族为

$$\tau_{X \times Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \mid \forall i \in I, U_i \in \tau_X, V_i \in \tau_Y \right\},$$

其中 τ_X, τ_Y 分别为 X, Y 上的拓扑， I 为任意指标集。

定义 7.19 (标准投影映射). 定义两个标准投影映射：

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\rightarrow X, & \pi_1(x, y) &= x, \\ \pi_2 : X \times Y &\rightarrow Y, & \pi_2(x, y) &= y. \end{aligned}$$

我们需要一个结论：

命题 7.20. 设 X, Y 为拓扑空间, $X \times Y$ 赋予乘积拓扑, Z 为任意拓扑空间。映射

$$h : Z \rightarrow X \times Y$$

连续的充分必要条件是复合映射

$$\pi_1 \circ h : Z \rightarrow X, \quad \pi_2 \circ h : Z \rightarrow Y$$

都连续, 其中 $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ 与 $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ 为标准投影。

证明. **必要性** ($\Rightarrow$)。投影 π_1, π_2 关于乘积拓扑连续: 对任意开集 $U \subset X$,

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$$

是乘积拓扑中的开集。同理 π_2 连续。连续映射的复合仍连续, 故 $\pi_1 \circ h$ 与 $\pi_2 \circ h$ 连续。

充分性 ($\Leftarrow$)。设 $\pi_1 \circ h$ 与 $\pi_2 \circ h$ 连续。任取 $X \times Y$ 中的基开集 $U \times V$, 其中 $U \subset X, V \subset Y$ 开。则

$$h^{-1}(U \times V) = (\pi_1 \circ h)^{-1}(U) \cap (\pi_2 \circ h)^{-1}(V).$$

右边是 Z 中两个开集的交, 故为开集。因此所有基开集的原像都是开集。

对任意开集 $W \subset X \times Y$, 可表示为基开集的并

$$W = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

于是

$$h^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} h^{-1}(U_i \times V_i)$$

仍是开集。故 h 连续。 □

定理 7.21. 设 X, Y 为拓扑空间, 则赋予乘积拓扑的笛卡尔积 $X \times Y$, 连同标准投影

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X, \quad \pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

构成 Top 中 X 与 Y 的范畴乘积。

证明. 我们验证乘积的泛性质。

1. 存在性。 任给拓扑空间 Z 与连续映射

$$f : Z \rightarrow X, \quad g : Z \rightarrow Y.$$

定义

$$h : Z \rightarrow X \times Y, \quad h(z) = (f(z), g(z)).$$

则

$$\pi_1 \circ h = f, \quad \pi_2 \circ h = g.$$

由 Proposition 1, f, g 连续蕴涵 h 连续。故满足条件的 h 存在。

2. 唯一性。 设连续映射 $h' : Z \rightarrow X \times Y$ 满足

$$\pi_1 \circ h' = f, \quad \pi_2 \circ h' = g.$$

对任意 $z \in Z$, 记 $h'(z) = (a, b)$, 则

$$a = \pi_1(h'(z)) = f(z), \quad b = \pi_2(h'(z)) = g(z).$$

故 $h'(z) = (f(z), g(z)) = h(z)$ 对所有 $z \in Z$ 成立, 即 $h' = h$ 。

综上, $(X \times Y, \pi_1, \pi_2)$ 满足范畴乘积的全部泛性质。□

空图与终对象

定义 7.22 (终对象). 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, 对象 $T \in \mathcal{C}$ 称为**终对象**, 若对任意对象 $X \in \mathcal{C}$, 存在唯一的态射 $f: X \rightarrow T$ 。

定义 7.23 (空图与空图的锥). 设 $\emptyset$ 为空范畴, 图 $D: \emptyset \rightarrow \mathcal{C}$ 称为**空图**。空图的一个锥是二元组 $(C, \{p_i\}_{i \in \emptyset})$, 其中 $C \in \mathcal{C}$, $\{p_i\}$ 为空索引族。即空图的锥等价于 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 C 。

定理 7.24. 范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象是终对象, 当且仅当它是空图 $D: \emptyset \rightarrow \mathcal{C}$ 的极限。

证明. 必要性: 设 L 是空图的极限。对任意对象 $C \in \mathcal{C}$, C 是空图的锥。由极限的泛性质, 存在唯一态射 $f: C \rightarrow L$, 故 L 是终对象。

充分性: 设 T 是终对象, 构造锥 $(T, \emptyset)$ 。对任意空图的锥 C , 由终对象定义, 存在唯一态射 $f: C \rightarrow T$ 。空锥无交换条件, 故 f 满足锥态射要求, 因此 T 是空图的极限。□

推论 7.25. 空图的余极限等价于范畴中的初始对象。

终端范畴 1

定义 7.26 (终端范畴 1). 范畴 **1** 定义如下:

1. 对象集: $\text{ob}(\mathbf{1}) = \{\bullet\}$;
2. 态射集: $\text{Hom}_{\mathbf{1}}(\bullet, \bullet) = \{\text{id}_{\bullet}\}$;
3. 复合律: $\text{id}_{\bullet} \circ \text{id}_{\bullet} = \text{id}_{\bullet}$, 满足范畴公理。

1 的泛性质 设 Cat 为小范畴构成的范畴, 对象为小范畴, 态射为函子。

定理 7.27. 终端范畴 **1** 是 Cat 中的终对象。

证明. 对任意小范畴 $\mathcal{C}$, 构造唯一函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$:

1. 对象: $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), F(X) = \bullet$;
2. 态射: $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), F(f) = \text{id}_{\bullet}$ 。

该映射保单位、保复合, 是合法函子。由 **1** 的唯一性, 任意函子 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$ 必与 F 相等。故 **1** 是 Cat 的终对象。□

7.3.2 等化子

等化子 (equalizer) 是由平行对 (parallel pair) ——即有两个对象和两条平行非恒等态射的范畴 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ ——索引的图表的极限。目标范畴 $\mathcal{C}$ 中，这种形状的图表就是一对平行态射 $f, g : A \rightrightarrows B$ 。

以 C 为顶点、覆盖该图表的锥由一对态射 $a : C \rightarrow A$ 和 $b : C \rightarrow B$ 构成，满足

$$fa = b, \quad ga = b$$

这两个等式对应索引范畴中两条非恒等态射给出的自然性条件 (3.1.3)。联立两式可得 $fa = ga$ ，而态射 b 必然等于这个公共复合，因此：覆盖平行对 $f, g : A \rightrightarrows B$ 的锥，完全由单个态射 $a : C \rightarrow A$ 刻画，其充要条件是 $fa = ga$ 。

等化子 $h : E \rightarrow A$ 是满足该性质的泛态射，极限图表

$$E \xrightarrow{h} A \rightrightarrows B$$

称为等化子图表 (equalizer diagram)。

其泛性质为：对任意满足 $fa = ga$ 的态射 $a : C \rightarrow A$ ，存在唯一的分解态射 $k : C \rightarrow E$ ，使得 $a = h \circ k$ ，对应交换图：

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow k & \searrow a & \\ E & \xrightarrow{h} & A \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & \xrightarrow{f} & \\ & \xleftarrow{g} & \end{array} B$$

我们来看一个简单的例子。

定理 7.28. 设 $\phi : G \rightarrow H$ 是群同态， $e : G \rightarrow H$ 是将 G 中所有元素映为 H 单位元 e_H 的平凡同态，则 ϕ 与 e 在群范畴 Grp 中的等化子为 $(\ker \phi, i : \ker \phi \hookrightarrow G)$ ，其中 i 是包含同态。

证明. 首先回顾等化子的定义：对平行态射 $f, g : A \rightrightarrows B$ ，其等化子是对象 E 与态射 $h : E \rightarrow A$ ，满足：

1. 等化条件： $f \circ h = g \circ h$ ；
2. 泛性质：对任意满足 $f \circ a = g \circ a$ 的态射 $a : C \rightarrow A$ ，存在唯一的态射 $k : C \rightarrow E$ 使得 $a = h \circ k$ 。

步骤 1：验证等化条件 $\phi \circ i = e \circ i$ 对任意 $x \in \ker \phi$ ，由核的定义 $\phi(x) = e_H$ ，因此

$$\phi(i(x)) = \phi(x) = e_H.$$

同时平凡同态满足 $e(x) = e_H$ ，故

$$e(i(x)) = e(x) = e_H.$$

因此 $\phi \circ i = e \circ i$ ，等化条件成立。

步骤 2：验证泛性质 任取群 C 与群同态 $a : C \rightarrow G$ ，满足 $\phi \circ a = e \circ a$ 。对任意 $c \in C$ ，由条件得

$$\phi(a(c)) = e(a(c)) = e_H,$$

故 $a(c) \in \ker \phi$ 对所有 $c \in C$ 成立。

存在性：构造同态 k 定义映射 $k : C \rightarrow \ker \phi$ 为 $k(c) = a(c)$ 。- 验证 k 是群同态：对任意 $c_1, c_2 \in C$,

$$k(c_1 c_2) = a(c_1 c_2) = a(c_1) a(c_2) = k(c_1) k(c_2),$$

且 $k(e_C) = a(e_C) = e_G \in \ker \phi$, 故 k 是群同态。- 验证 $a = i \circ k$ ：对任意 $c \in C$,

$$(i \circ k)(c) = i(k(c)) = a(c),$$

因此 $a = i \circ k$, 存在性得证。

唯一性 假设存在群同态 $k' : C \rightarrow \ker \phi$ 满足 $a = i \circ k'$, 则对任意 $c \in C$,

$$a(c) = (i \circ k')(c) = k'(c).$$

结合 $k(c) = a(c)$, 得 $k'(c) = k(c)$ 对所有 $c \in C$ 成立, 故 $k' = k$, 唯一性得证。

综上, $(\ker \phi, i : \ker \phi \hookrightarrow G)$ 满足等化子的全部定义, 定理得证。 $\square$

7.3.3 拉回

拉回 (pullback) 是由偏序范畴 $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ (省略恒等态射, 包含两条有公共 codomain 的非恒等态射) 索引的图表的极限。换言之, 对 $f : B \rightarrow A$ 、 $g : C \rightarrow A$, 拉回为交换方块

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{k} & C \\ \downarrow h & \lrcorner & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

并满足如下泛性质：每个满足 $fc = gb$ 的交换方块都唯一地经 P 分解。

7.3.4 逆极限

ω^{op} 范畴的定义

范畴 ω (自然数偏序范畴) 的对象为全体非负整数 $\{0, 1, 2, \dots\}$, 对任意 $i \leq j$ 存在唯一态射 $i \rightarrow j$, 态射复合由偏序传递性定义。其对偶范畴 ω^{op} 反转所有态射方向：对象仍为 $\{0, 1, 2, \dots\}$, 对任意 $i \leq j$ 存在唯一态射 $j \rightarrow i$, 直观形状为

$$\dots \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

定义 7.29 (3.1.21 逆极限). 以范畴 ω^{op} 为指标的图表的极限, 称为**塔 (tower) 或态射序列的逆极限 (inverse limit)**。一个 ω^{op} 索引的图表由一系列对象 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 和态射 $\{f_n : F_{n+1} \rightarrow F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 构成, 即

$$\dots \xrightarrow{f_3} F_3 \xrightarrow{f_2} F_2 \xrightarrow{f_1} F_1 \xrightarrow{f_0} F_0$$

(复合与恒等态射按范畴结构自然存在, 通常省略)

覆盖该图表的锥由一个对象 C 和态射族 $\{\lambda_n : C \rightarrow F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 构成, 满足交换性：对任意 $n \geq 0$,

$f_n \circ \lambda_{n+1} = \lambda_n$ ，对应交换图：其交换条件可写成图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\lambda_{n+1}} & F_{n+1} \\ & \searrow \lambda_n & \downarrow f_n \\ & & F_n \end{array}$$

该图表的**逆极限**（记作 $\varprojlim F_n$ ）是上述锥中的终端锥，即满足泛性质的锥：对任意覆盖该图表的锥 $(C, \{\lambda_n\})$ ，存在唯一的态射 $k: C \rightarrow \varprojlim F_n$ ，使得对所有 n ， $\lambda_n = p_n \circ k$ ，其中 $p_n: \varprojlim F_n \rightarrow F_n$ 是极限锥的投影态射。

例 7.30. p -进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 被定义为如下环图表的逆极限：

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$$

对应的图表为

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}/p^4 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^3 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p \mathbb{Z}$$

我们具体解释一下图表的 map ，以及 $\mathbb{Z}_p$ 到底是什么。对任意剩余类 $\bar{a} = a + p^{n+1} \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p^{n+1} \mathbb{Z}$ ，定义映射

$$\pi_n: \mathbb{Z}/p^{n+1} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}, \quad \pi_n(\bar{a}) = a + p^n \mathbb{Z}$$

我们可以取 $\mathbb{Z}_p$ 如下：

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ (a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}, n \geq 1, \pi_n(a_{n+1}) = a_n \right\}$$

其中，

- **环结构**：按分量定义加法和乘法： $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ ， $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$ ，单位元为 $(1, 1, 1, \dots)$ ，零元为 $(0, 0, 0, \dots)$ ，验证可知满足环的公理。
- **投影态射**：对每个 n ，有自然投影 $p_n: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ ， $p_n((a_k)) = a_n$ ，满足 $p_n = \pi_n \circ p_{n+1}$ ，这就是你图中提到的“极限锥的投影态射”。

因此，我们定义的 $\mathbb{Z}_p$ 确实是极限锥。

7.4 余积、乘积与矩阵表示

7.4.1 余积的泛性质

设范畴 $\mathcal{C}$ 中对象族 $\{A_i\}_{i \in I}$ 的余积为 $\coprod_{i \in I} A_i$ ，配套余射 $\iota_i: A_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ ，满足泛性质：对任意对象 $X \in \mathcal{C}$ ，任意态射族 $\{f_i: A_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ ，**存在唯一** 态射 $f: \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow X$ ，使得

$$f \circ \iota_i = f_i, \quad \forall i \in I.$$

我们希望证明态射集的自然双射：

$$\mathcal{C} \left(\coprod_{i \in I} A_i, X \right) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{C}(A_i, X)$$

注意，这里是取定 X ，右边是态射集的笛卡尔积（所以元素是态射族）

正向映射 Φ 对任意 $f \in \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} A_i, X)$, 定义

$$\Phi(f) := (f \circ \iota_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{C}(A_i, X).$$

反向映射 Ψ 对任意 $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{C}(A_i, X)$ (相当于取了一个余锥的 legs), 由余积泛性质, 存在唯一 $f \in \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} A_i, X)$ 满足 $f \circ \iota_i = f_i$, 定义

$$\Psi((f_i)_{i \in I}) := f.$$

互逆性

- $\Phi \circ \Psi = \text{id}$: 任取 $(f_i)_{i \in I}$, 记 $f = \Psi((f_i)_{i \in I})$, 则 $\Phi(f) = (f \circ \iota_i)_{i \in I} = (f_i)_{i \in I}$
- $\Psi \circ \Phi = \text{id}$: 任取 $f \in \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} A_i, X)$, 记 $(f_i)_{i \in I} = \Phi(f)$, 由泛性质唯一性, $\Psi((f_i)_{i \in I}) = f$.

因此 Φ 与 Ψ 互为逆映射, 所以两个集合确实同构。

7.4.2 矩阵表示

基于上面的两个同构, 我们希望研究下面这个矩阵表示: 一个态射 $f: \coprod_i A_i \rightarrow \prod_j B_j$ 由其矩阵分量

$$f_{ij} = \pi_j \circ f \circ \iota_i: A_i \longrightarrow B_j$$

唯一确定; 相应的交换图为

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{\iota_i} & \coprod_i A_i & \xrightarrow{f} & \prod_j B_j \\ & \searrow f_{ij} & & & \downarrow \pi_j \\ & & B_j & & B_j \end{array}$$

命题 7.31. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_j\}_{j \in J}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的对象族, $\coprod_{i \in I} A_i$ 为 $\{A_i\}$ 的余积 (余射为 $\iota_i: A_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$), $\prod_{j \in J} B_j$ 为 $\{B_j\}$ 的乘积 (投影为 $\pi_j: \prod_{j \in J} B_j \rightarrow B_j$)。则存在集合的自然双射:

$$\mathcal{C}\left(\coprod_{i \in I} A_i, \prod_{j \in J} B_j\right) \cong \prod_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{C}(A_i, B_j)$$

证明. 我们通过构造双向互逆的映射来证明双射。

1. 正向映射: $\Phi: \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} A_i, \prod_{j \in J} B_j) \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{C}(A_i, B_j)$

任取态射 $f \in \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} A_i, \prod_{j \in J} B_j)$, 对任意 $(i, j) \in I \times J$, 定义分量态射:

$$f_{(i,j)} := \pi_j \circ f \circ \iota_i \in \mathcal{C}(A_i, B_j)$$

令 $\Phi(f) = (f_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$, 则 $\Phi(f)$ 是 $\prod_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{C}(A_i, B_j)$ 中的元素, 故 Φ 良定义。

2. 反向映射: $\Psi: \prod_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{C}(A_i, B_j) \rightarrow \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} A_i, \prod_{j \in J} B_j)$

任取一族分量态射 $(f_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J} \in \prod_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{C}(A_i, B_j)$: 对任意固定的 $j \in J$, 由余积的定义: 态射族

$$\{f_{(i,j)}: A_i \rightarrow B_j\}_{i \in I}$$

唯一对应态射

$$f_j : \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow B_j$$

且满足 $f_j \circ \iota_i = f_{(i,j)}$ 对所有 $i \in I$ 成立；

同理，由积的泛性质，态射族

$$\{f_j : \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow B_j\}_{j \in J}$$

唯一对应态射

$$f : \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{j \in J} B_j$$

满足 $\pi_j \circ f = f_j$ 对所有 $j \in J$ 成立。

令 $\Psi((f_{(i,j)})) = f$ ，则 Ψ 良定义。

3. 验证 Φ 与 Ψ 互为逆映射

验证 $\Phi \circ \Psi = \text{id}$ ：任取 $(f_{(i,j)}) \in \prod_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{C}(A_i, B_j)$ ，设 $f = \Psi((f_{(i,j)}))$ ，则对任意 $(i, j) \in I \times J$ ：

$$(\Phi(f))_{(i,j)} = \pi_j \circ f \circ \iota_i = f_j \circ \iota_i = f_{(i,j)}$$

故 $\Phi(\Psi((f_{(i,j)}))) = (f_{(i,j)})$ ，即 $\Phi \circ \Psi = \text{id}$ 。

验证 $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ ：任取 $f \in \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} A_i, \prod_{j \in J} B_j)$ ，设 $(f_{(i,j)}) = \Phi(f)$ ， $f' = \Psi((f_{(i,j)}))$ 。对任意 $j \in J$ ，有 $\pi_j \circ f' = f_j$ ，而由 Φ 的定义， $f_j \circ \iota_i = f_{(i,j)} = \pi_j \circ f \circ \iota_i$ 。由余积泛性质的唯一性，得 $\pi_j \circ f' = \pi_j \circ f$ 对所有 $j \in J$ 成立；再由乘积泛性质的唯一性，得 $f' = f$ ，故 $\Psi(\Phi(f)) = f$ ，即 $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ 。

因此 Φ 与 Ψ 互为逆映射，故为双射，命题得证。 $\square$

注 7.32. 事实上，该同构是伴随函子性质的直接推论：

- ▶ 余积是 Hom 函子的左伴随： $\mathcal{C}\left(\coprod_{i \in I} A_i, Y\right) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{C}(A_i, Y)$ （对任意 Y 自然）；
- ▶ 积是 Hom 函子的右伴随： $\mathcal{C}\left(X, \prod_{j \in J} B_j\right) \cong \prod_{j \in J} \mathcal{C}(X, B_j)$ （对任意 X 自然）；
- ▶ 令 $X = \coprod_{i \in I} A_i$ 、 $Y = \prod_{j \in J} B_j$ ，复合两个伴随同构，即得目标同构，与构造性证明完全等价。

我们这里只证明了双射，没有证明自然性。我们把自然性留到伴随一节去证明。

8 集合范畴中的极限

8.1 拓扑范畴中的余极限

我们首先研究一下拓扑范畴里，一族对象的 product 是长什么样的。

定义 8.1 (余积的泛性质). 在拓扑空间范畴 **Top** 中，一族拓扑空间 $\{X_j\}_{j \in J}$ 的余积是一个拓扑空间 X 与一族连续映射 (典范嵌入) $\iota_j : X_j \rightarrow X$ ，满足：对任意拓扑空间 Z 与任意一族连续映射 $f_j : X_j \rightarrow Z$ ，存在唯一的连续映射 $f : X \rightarrow Z$ ，使得对所有 $j \in J$ ，有

$$f \circ \iota_j = f_j.$$

命题 8.2. 设 $\{X_j\}_{j \in J}$ 是一族拓扑空间，令

$$\coprod_{j \in J} X_j = \{(x, j) \mid j \in J, x \in X_j\}$$

为集合的无交并，赋予弱拓扑：子集 $U \subseteq \coprod_{j \in J} X_j$ 是开集，当且仅当对任意 $j \in J$ ， $\iota_j^{-1}(U) = U \cap X_j$ 是 X_j 中的开集。典范嵌入 $\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{j \in J} X_j$ 定义为 $\iota_j(x) = (x, j)$ 。则 $(\coprod_{j \in J} X_j, \{\iota_j\}_{j \in J})$ 是范畴 **Top** 中 $\{X_j\}_{j \in J}$ 的余积。

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{\iota_j} & \coprod_{j \in J} X_j \\ & \searrow f_j & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

证明. 第一步：存在性

给定任意拓扑空间 Z 与任意一族连续映射 $\{f_j : X_j \rightarrow Z\}_{j \in J}$ ，定义集合映射：

$$f : \coprod_{j \in J} X_j \rightarrow Z, \quad f((x, j)) := f_j(x).$$

下证 f 连续。

设 $V \subseteq Z$ 为任意开集，对任意 $j \in J$ ，有：

$$\iota_j^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ \iota_j)^{-1}(V) = f_j^{-1}(V).$$

由 f_j 连续， $f_j^{-1}(V)$ 是 X_j 中的开集。根据不交并拓扑的定义， $f^{-1}(V)$ 是 $\coprod_{j \in J} X_j$ 中的开集，故 f 连续。

第二步：唯一性

假设存在连续映射 $g : \coprod_{j \in J} X_j \rightarrow Z$ 满足

$$g \circ \iota_j = f_j, \quad \forall j \in J.$$

对任意 $(x, j) \in \coprod_{j \in J} X_j$, 有:

$$g((x, j)) = g(\iota_j(x)) = f_j(x) = f((x, j)).$$

因此 $g = f$, 满足条件的映射唯一。

综上, $\coprod_{j \in J} X_j$ 连同典范嵌入 $\{\iota_j\}$ 满足余积的泛性质, 故拓扑不交并是 **Top** 中的余积。□

下面我们给出 CW 复形的例子 (CW 复形是余极限不是余积)。

定义 8.3. 一个 n 维胞腔 e^n (或简称 e) 是与开 n 维圆盘 $D^n - S^{n-1}$ 同胚的拓扑空间。

由于开圆盘和 R^n 同胚, 所以 n 胞腔就是一个 n 维的拓扑空间。

我们希望把胞腔粘到其他拓扑空间上面去, 这就需要引出 attaching map 的定义

定义 8.4. 设 A 为一个拓扑空间, D^n 是 n 维闭单位圆盘 (欧氏空间中的闭单位球)。设 $\phi: \partial D^n \rightarrow A$ 为一个连续映射。若拓扑空间 X 可表示为

$$X = (A \amalg D^n) / \sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 定义为: 对任意 $x \in \partial D^n$, 有 $x \sim \phi(x) \in A$ (其余点仅等价于自身), 则称 X 是由 A 通过映射 ϕ 粘帖一个 n -cell 得到的空间。映射 $\phi: \partial D^n \rightarrow A$ 称为该胞腔的粘帖映射。

类似的, 我们也可以同时粘帖无穷多个胞腔: 设对每个指标 λ 有粘帖映射 $\phi_\lambda: \partial D_\lambda^n \rightarrow A$, 则定义

$$X = \left(A \amalg \coprod_{\lambda} D_{\lambda}^n \right) / \sim,$$

其中等价关系为: 对任意 $x \in \partial D_{\lambda}^n$, 有 $x \sim \phi_{\lambda}(x) \in A$ 。

下面我们定义 CW 复形。

定义 8.5 (CW 复形的范畴论定义). 一个 CW 复形是一个豪斯多夫空间 X , 且是下述拓扑空间序列:

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots$$

的余极限, 这个序列定义如下:

1. 0 维骨架: X^0 是一个离散拓扑空间 (由 0 维胞腔构成)。
2. 归纳构造: 对于 $n \geq 1$, 空间 X^n 是通过粘贴 n 维胞腔从 X^{n-1} 得到的。

序列两个相邻空间之间的 map 定义如下:

$$i_n: X_n \rightarrow X_{n+1}, \quad i_n(x) = [x]$$

且 i_n 是单射。

事实上, 我们可以证明, 这个 X 就是下面这样的拓扑空间和 map 构成的:

- 作为集合,

$$X = \left(\coprod_{n \geq 0} X^n \right) / \sim$$

其中, 等价关系为:

$$\forall n \geq 0, \forall x \in X^n: \quad x \sim i_n(x) \in X^{n+1}$$

- X 上的拓扑是弱拓扑: 子集 $U \subseteq X$ 是开集当且仅当对所有 $n \geq 0$, $U \cap X^n$ 是 X^n 中的开集。
- 极限锥的 leg : X_i 到 X 的典范嵌入。

证明和前面 product 里的证明完全一样，只是现在需要多证明一个交换性（与序列里面态射的交换性，而这是显然的）。

8.2 集合范畴中的极限

尽管我们可以对任意范畴中任意形状的图表定义极限，但仅仅给出定义并不能保证具有该泛性质的对象一定存在。在本节中，我们将研究范围限制在取值于集合范畴的图表，并给出构造性证明：对所有满足重要大小限制的集值图表，其极限都存在。该一般构造的特殊情形可以直接计算出乘积、等化子、拉回和集合的逆极限，这些公式能为我们在更抽象的范畴中计算极限与余极限提供直观。

8.2.1 完备性的判别

本节的核心结论是以下两个定理：

定理 8.6. 集合范畴 $\mathbf{Set}$ 是完备的，即它容许所有小极限。

定理 8.7. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是（余）完备的，当且仅当它具有（余）积和（余）等化子。

8.2.2 基本定义

我们首先给出陈述主要结论所需的基本定义。

定义 8.8. 若一个图表的指标范畴是小范畴，则称该图表为**小图表**。

定义 8.9. 范畴 $\mathcal{C}$ 是**完备的**，如果它容许所有取值于 $\mathcal{C}$ 的小图表的极限。

定义 8.10. 范畴 $\mathcal{C}$ 是**余完备的**，如果它容许所有取值于 $\mathcal{C}$ 的小图表的余极限。

8.2.3 极限的构造

本节的目标是显式构造任意小图表 $F : J \rightarrow \mathbf{Set}$ 的极限。在给出构造之前，我们回顾极限的泛性质以及可表函子的概念。

极限的泛性质 回顾：对于图表 $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ ， F 的极限是一个对象 $\lim F \in \mathcal{C}$ ，并伴随一个自然同构 $\{\mu_X, X \in \mathcal{C}\}$

$$\mu_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim F) \cong \mathrm{Cone}(X, F)$$

其中 $\mathrm{Cone}(X, F)$ 表示以 X 为顶点的 F 上的锥的集合。该自然同构表明，极限是锥函子 $\mathrm{Cone}(-, F) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的表示对象。

当 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ 时，该自然同构就是集合间的双射（注意，一个自然变换是自然同构，当且仅当这个自然变换的分量都是同构态射；在 $\mathbf{Set}$ 范畴里就是同构），写作：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \lim F) \cong \mathrm{Cone}(X, F)$$

对任意集合 X 成立。

可表性与终对象 集合范畴中的一个关键观察是：任意集合 A 都自然同构于 $\text{Hom}_{\text{Set}}(1, A)$ ，其中 $1 = \{*\}$ 是固定的单点集。同构

$$A \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(1, A)$$

由将每个元素 $a \in A$ 映为唯一映射 $* \mapsto a$ 给出。

将其应用于极限，可得：

$$\lim F \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(1, \lim F) \cong \text{Cone}(1, F).$$

这提示我们可以直接将 F 的极限定义为以 1 为顶点的 F 上的锥的集合。

显式构造 基于以上动机，我们给出如下定义。

定义 8.11. 对任意小图表 $F : J \rightarrow \text{Set}$ ，定义

$$\lim F := \text{Cone}(1, F)$$

为以 1 为顶点的 F 上的锥的集合。对每个对象 $j \in J$ ，定义极限锥的分支态射

$$\lambda_j : \lim F \rightarrow F(j)$$

为

$$\lambda_j(\mu) = \mu_j$$

其中 $\mu : 1 \Rightarrow F$ 是任意锥， $\mu_j : 1 \rightarrow F(j)$ 是锥 μ 的第 j 个分量。

注 8.12. 我们定义的极限锥的 leg，就是把原来的锥，映射到这个锥对应的 leg。

定理 8.13. 集合范畴 Set 是完备的，容许所有小极限。

证明. 设 $F : J \rightarrow \text{Set}$ 为任意小图表。我们需要证明，定义 3.2.3 中的 $\lim F$ 与分支态射 $(\lambda_j : \lim F \rightarrow F(j))_{j \in J}$ 构成 F 的一个极限锥。证明分为两步：

第一步：证明 $(\lim F, (\lambda_j))$ 是 F 上的锥 我们需要验证：对任意态射 $f : j \rightarrow k$ 在 J 中，图表

$$\begin{array}{ccc} \lim F & \xrightarrow{\lambda_j} & F(j) \\ & \searrow \lambda_k & \swarrow Ff \\ & F(k) & \end{array}$$

交换。任取元素 $\mu \in \lim F = \text{Cone}(1, F)$ ，我们计算：

$$Ff \circ \lambda_j(\mu) = Ff(\mu_j) = \mu_k = \lambda_k(\mu),$$

其中中间的等式成立是因为 $\mu : 1 \Rightarrow F$ 本身就是一个锥，因此 $Ff \circ \mu_j = \mu_k$ 。这说明上述图表对任意 μ 交换，因此 (λ_j) 定义了一个以 $\lim F$ 为顶点的锥。

第二步：证明该锥是泛性质的（即极限锥） 设 $\zeta : X \Rightarrow F$ 为任意以集合 X 为顶点的锥。我们需要证明存在唯一的函数 $r : X \rightarrow \lim F$ ，使得对所有 $j \in J$ ， $\lambda_j \circ r = \zeta_j$ 。

首先定义 r ：对每个元素 $x \in X$ ，将其视为函数 $x : 1 \rightarrow X$ ，则与锥 ζ 复合得到一个以 1 为顶点的锥 $\zeta_x : 1 \Rightarrow F$ 。令

$$r(x) := \zeta_x.$$

由定义, $r(x) \in \lim F = \text{Cone}(1, F)$ 。接下来验证该定义满足要求: 对任意 $j \in J$,

$$\lambda_j(r(x)) = \lambda_j(\zeta x) = (\zeta x)_j = \zeta_j \circ x.$$

这说明 $\lambda_j \circ r = \zeta_j$, 即锥 ζ 沿 r 分解通过极限锥 λ 。

最后证明唯一性: 若存在另一个函数 $r' : X \rightarrow \lim F$ 满足 $\lambda_j \circ r' = \zeta_j$, 则对任意 $x \in X$, 有

$$\lambda_j(r'(x)) = \zeta_j(x) = (\zeta x)_j$$

对所有 $j \in J$ 成立。这说明 $r'(x)$ 与 ζx 作为以 1 为顶点的锥的分量完全一致, 因此 $r'(x) = \zeta x = r(x)$, 即 $r' = r$ 。因此分解是唯一的。

综上, $(\lim F, (\lambda_j))$ 是 F 的一个极限锥, 因此 **Set** 容许所有小极限, 即 **Set** 是完备的。□

8.2.4 基本例子

我们现在应用定理 3.2.6 来计算常见图表的极限。

例 8.14. (集合的乘积) 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为一族集合, 视为指标范畴 J (离散范畴) 上的图表。以 1 为顶点的该图表上的锥就是一族映射 $\mu_j : 1 \rightarrow A_j$, 即每个 A_j 中的一个元素。因此这些锥的全体, 构成极限:

$$\lim_{j \in J} A_j = \{(a_j)_{j \in J} \mid a_j \in A_j\} = \prod_{j \in J} A_j,$$

即集合的笛卡尔积。

由于 J 是离散范畴, 所以图上的锥所需的交换性是天然满足的。也就是说, 对态射族, 不需要增加额外的限制。

例 8.15. (终对象) 空图表 (指标范畴为空) 的极限是集合范畴的终对象。以 1 为顶点的空图表上的锥只有一个, 因此

$$\lim \emptyset = \{*\},$$

即单点集。

注 8.16. 空图表上的锥其实只有顶点 (单点集) 加上空的分支, 因此集合范畴的终对象是单点集。这与 “一个范畴中的终对象是空图表上的极限锥” 这一结论一致。

例 8.17. (等化子) 设 $f, g : X \rightrightarrows Y$ 为一对平行函数。它们的等化子是满足 $f \circ x = g \circ x$ 的映射 $x : 1 \rightarrow X$ 的集合, 即

$$\text{eq}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

注 8.18. 这里我们把元素 $x \in X$ 与映射 $x : 1 \rightarrow X$ 视为同一对象, 因此以 1 为顶点的锥就是这样的映射, 而锥的交换条件 $f \circ x = g \circ x$ 恰好对应等化子的定义。等化子也可以写成拉回的形式, 便于直观理解。

例 8.19. (逆极限) 设 $F : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为一个反向序列, 即

$$\cdots \rightarrow F_3 \xrightarrow{f_{32}} F_2 \xrightarrow{f_{21}} F_1 \xrightarrow{f_{10}} F_0.$$

以 1 为顶点的该图表上的锥是一族元素 $(x_n \in F_n)_{n \in \omega}$, 满足 $f_{n,n-1}(x_n) = x_{n-1}$ 对所有 n 成立。因此

$$\lim_n F_n = \left\{ (x_n)_{n \in \omega} \in \prod_n F_n \mid f_{n,n-1}(x_n) = x_{n-1} \right\}.$$

注 8.20. 这个例子与乘积的情况类似，但指标范畴不再是离散的，因此锥的分支必须满足额外的交换条件，即 $f_{n,n-1}(x_n) = x_{n-1}$ ，以保证图表交换。这个极限的构造与乘积的情况完全一致，只是多了相容性条件。

例 8.21. (拉回) 设 $f : B \rightarrow A$ 和 $g : C \rightarrow A$ 为一对函数。它们的拉回是以 1 为顶点的该图表上的锥的集合，即满足交换条件的映射 $b : 1 \rightarrow B$ 和 $c : 1 \rightarrow C$ ，也就是满足 $f(b) = g(c)$ 的元素对 (b, c) 。因此

$$B \times_A C = \{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}.$$

注 8.22. 拉回的定义本质上还是将元素与从 1 出发的映射等同起来，因此以 1 为顶点的锥就是这样的元素对，而锥的交换条件 $f(b) = g(c)$ 就是拉回的定义条件。这个例子同时展示了极限的构造如何统一了乘积、等化子等特殊情况。

完备性的判别

定理 8.23. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是 (余) 完备的，当且仅当它具有 (余) 积和 (余) 等化子。

证明. 我们仅证明关于完备性的结论，关于余完备性的对偶结论留给读者。显然，如果一个范畴是完备的，那么它必然拥有积和等化子。现在我们只考虑反方向的证明。

假设范畴 $\mathcal{C}$ 拥有积和等化子，设 $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ 为一个函子，其中 I 是小范畴。

步骤 1: 构造两个积 对 I 中的任意态射 f ，记 $d(f)$ 为 f 的定义域， $c(f)$ 为 f 的上域，即 $f \in \text{Hom}_I(d(f), c(f))$ 。

我们首先在 $\mathcal{C}$ 中构造以下两个对象族的积：

$$(F(i))_{i \in \text{Ob } I} \quad \text{和} \quad (F(c(f)))_{f \in \text{Hom}_I(d(f), c(f))},$$

分别记为：

$$\left(\prod_i F(i), (u_i)_{i \in \text{Ob } I} \right), \quad \left(\prod_f F(c(f)), (v_{c(f)})_{f \in \text{Hom}_I(d(f), c(f))} \right).$$

步骤 2: 利用泛性质构造态射 α, β 由于 $(\prod_f F(c(f)), (v_{c(f)})_f)$ 是 $(F(c(f)))_f$ 在 $\mathcal{C}$ 中的积，因此存在唯一的态射

$$\alpha : \prod_i F(i) \rightarrow \prod_f F(c(f))$$

使得对所有 $g \in \text{Hom}_I(d(g), c(g))$ ，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in \text{Ob } I} F(i) & \xrightarrow{u_{c(g)}} & F(c(g)) \\ \alpha \downarrow & \nearrow v_{c(g)} & \\ \prod_f F(c(f)) & & \end{array}$$

即 $v_{c(g)} \circ \alpha = u_{c(g)}$

同理，存在唯一的态射

$$\beta : \prod_i F(i) \rightarrow \prod_f F(c(f))$$

使得对所有 $g \in \text{Hom}_I(d(g), c(g))$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in \text{Ob } I} F(i) & \xrightarrow{F(g) \circ u_{d(g)}} & F(c(g)) \\ \downarrow \beta & \nearrow v_{c(g)} & \\ \prod_f F(c(f)) & & \end{array}$$

即 $v_{c(g)} \circ \beta = F(g) \circ u_{d(g)} \circ$

步骤 3: 取 α 和 β 的等化子 设 (L, l) 是态射对 (α, β) 在 $\mathcal{C}$ 中的等化子。对每个 $g : d(g) \rightarrow c(g)$, 两条定义 α, β 的分量路径由下图概括:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in \text{Ob } I} F(i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} & \prod_{f \in \text{Mor } I} F(c(f)) \\ \uparrow l & & \uparrow F(g) \\ L & \xrightarrow[p_{d(g)}]{} & F(d(g)) \end{array}$$

步骤 4: 证明 $(L, p_i := u_i \circ l)$ 是 F 上的锥 我们断言: $(L, (p_i)_{i \in \text{Ob } I})$ 是 F 上的一个锥。

事实上, 对任意 $r \in \text{Hom}_I(d(r), c(r))$, 有:

$$F(r) \circ p_{d(r)} = F(r) \circ u_{d(r)} \circ l \stackrel{(2.20)}{=} v_{c(r)} \circ \beta \circ l \stackrel{(2.19)}{=} v_{c(r)} \circ \alpha \circ l = u_{c(r)} \circ l = p_{c(r)}.$$

因此 (L, p_i) 是一个锥。

步骤 5: 证明泛性质 (唯一性) 任取 F 上的另一个锥 $(M, (q_i)_{i \in \text{Ob } I})$ 。由于 $(\prod_i F(i), (u_i)_i)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的积, 存在唯一态射 $q' : M \rightarrow \prod_i F(i)$, 使得对所有 $j \in \text{Ob } I$:

$$u_j \circ q' = q_j.$$

对任意 $r \in \text{Hom}_I(d(r), c(r))$, 计算得:

$$v_{c(r)} \circ \alpha \circ q' \stackrel{(2.19)}{=} u_{c(r)} \circ q' \stackrel{(2.21)}{=} q_{c(r)} = F(r) \circ q_{d(r)} \stackrel{(2.21)}{=} F(r) \circ u_{d(r)} \circ q' \stackrel{(2.20)}{=} v_{c(r)} \circ \beta \circ q'.$$

即对所有 r 都有 $v_{c(r)} \circ \alpha \circ q' = v_{c(r)} \circ \beta \circ q'$ 。根据积的泛性质 (命题 2.2.14(1)), 可得 $\alpha \circ q' = \beta \circ q'$ 。

因为 (L, l) 是 (α, β) 的等化子, 所以存在唯一态射 $q : M \rightarrow L$ 满足:

$$l \circ q = q'. \quad (2.22)$$

步骤 6: 验证泛锥图交换 态射 q 是 $\mathcal{C}$ 中唯一使得下图对所有 $j \in \text{Ob } I$ 交换的态射:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{q_j} & F(j) \\ \downarrow q & \nearrow p_j & \\ L & & \end{array}$$

证明：对任意 $j \in \text{Ob } I$,

$$p_j \circ q = (u_j \circ l) \circ q \stackrel{(2.22)}{=} u_j \circ q' \stackrel{(2.21)}{=} q_j.$$

最后证明 q 的唯一性。假设存在 $\bar{q} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, L)$ 满足 $p_j \circ \bar{q} = q_j$, 则:

$$u_j \circ l \circ \bar{q} = q_j$$

对所有 j 成立。由于 q' 是满足 $u_j \circ q' = q_j$ 的唯一态射, 故 $l \circ \bar{q} = q'$ 。再由等化子的泛性质 (2.22), 得 $\bar{q} = q$ 。

综上, $(L, (p_i)_i)$ 满足 F 的极限的泛性质。 □

8.3 极限与余极限的保持、反射与创造

我们直接给出保持/反射/构造极限函子的定义

定义 8.24. 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 称为保持 (小) 极限/余极限的, 若对任意函子 $G: I \rightarrow \mathcal{C}$ (其中 I 为 (小) 范畴), 只要 $(L, (p_i)_{i \in \text{Ob } I})$ 是 G 的极限/余极限, 则 $(F(L), (F(p_i))_{i \in \text{Ob } I})$ 就是 $F \circ G$ 的极限/余极限。

这里的复合, 就是函子的复合。类似的, 我们有反射极限的定义。

定义 8.25. 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 称为反射 (小) 极限/余极限的, 若对任意函子 $G: I \rightarrow \mathcal{C}$ (其中 I 为 (小) 范畴), 以及 G 上的任意锥/余锥 $(L, (p_i)_{i \in \text{Ob } I})$, 只要 $(F(L), (F(p_i))_{i \in \text{Ob } I})$ 是 $F \circ G$ 的极限/余极限, 则 $(L, (p_i)_{i \in \text{Ob } I})$ 就是 G 的极限/余极限。

也就是说, 如果锥的像是极限锥, 就可以保证锥本身是一个极限锥, 那么我们称这个函子是反射极限的。

还有一个概念是构造极限, 但这个定义我不确定是下面这个 (没有找到参考文献)。

定义 8.26. 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子, $\mathcal{K}$ 是一类由小范畴 $\mathcal{J}$ 指标的图 $K: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 。称 F **创建** $\mathcal{K}$ -型极限, 当且仅当:

1. 存在可提升的极限锥: $\forall K \in \mathcal{K}$, 若 $FK: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$ 在 $\mathcal{D}$ 中存在极限: $(d, \mu: d \Rightarrow FK)$, 则存在 K 的极限锥 $(c, \lambda: c \Rightarrow K)$, 使得

$$F(c, \lambda: c \Rightarrow K) \cong (d, \mu: d \Rightarrow FK).$$

2. F 反射 $\mathcal{K}$ -型极限:

$\forall K \in \mathcal{K}, \forall \text{ 锥 } (c', \lambda': c' \Rightarrow K) \text{ 在 } \mathcal{C} \text{ 中},$
若 $F(c', \lambda': c' \Rightarrow K)$ 是 FK 在 $\mathcal{D}$ 中的极限锥,
则 $(c', \lambda': c' \Rightarrow K)$ 是 K 在 $\mathcal{C}$ 中的极限锥。

可以看到, 函子可以构建极限是相当强的。事实上, 我们有如下结果;

命题 8.27 (3.3.3). 设函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中为某一类图创建极限, 且范畴 $\mathcal{D}$ 拥有这类图的所有极限。则:

1. 范畴 $\mathcal{C}$ 也拥有这类图的极限;
2. 函子 F 保持这类图的极限。

证明. 任取该类图中的一个图 $K : J \rightarrow \mathcal{C}$ 。由题设, $\mathcal{D}$ 中存在图 FK 的极限锥 $\mu : d \Rightarrow FK$ 。

由于 F 创建这类极限, $\mathcal{C}$ 中必存在图 K 的极限锥 $\lambda : c \Rightarrow K$, 使得其在 F 下的像 $F\lambda$ 与 μ 同构 (因为任意两个公共图的极限锥必同构, 见练习 3.1.iv)。这说明 $\mathcal{C}$ 确实拥有该类图的极限。

为证明 F 保持这类极限, 考虑图 K 的另一个极限锥 $\lambda' : c' \Rightarrow K$ 。根据命题 3.1.7, $\mathcal{C}$ 中的这两个极限锥同构。通过复合同构, 我们得到图 FK 的极限锥 $F\lambda' : Fc' \Rightarrow FK$ 与极限锥 $\mu : d \Rightarrow FK$ 同构。

这蕴含着锥 $F\lambda' : Fc' \Rightarrow FK$ 本身也是一个极限锥 (证明不难, 关键是用到: 若一个锥同构于一个极限锥, 则它本身也是极限锥), 从而证明了 F 保持这类极限。 $\square$

9.1 预备回顾与特殊函子

定理 9.1. 对任意小图 $F : J \rightarrow \mathbf{Set}$, 定义

$$\lim F := \text{Cone}(1, F)$$

为以终端对象 1 (单点集) 为顶点的、 F 上的锥的集合。对每个对象 $j \in J$, 定义极限锥的腿 $\lambda_j : \lim F \rightarrow F_j$ 为: 将以 1 为顶点的锥 μ 映射到其第 j 条腿 $\mu_j : 1 \rightarrow F_j$ (对应 F_j 中的元素)。

注 9.2. 在 $\mathbf{Set}$ 中, 终端对象 1 也经常记为 $\{*\}$. 此外, 现在这个同构是经常使用的: 对任意集合 A ,

$$\text{Hom}(1, A) \cong A$$

即从 1 到 A 的态射一一对应于 A 中的元素。我们经常把 1 到 A 的态射直接就记为 a , 视为 A 中元素。

下面这个定理 (原文定理 3.2.13) 告诉我们, 集合范畴极限可以使用 product 和等化子表示。

定理 9.3. 集合范畴 $\mathbf{Set}$ 中, 任意小函子 $F : J \rightarrow \mathbf{Set}$ 的极限 $\lim J F$, 都可以表示为两个乘积之间的一对态射的等化子:

$$\lim J F \longrightarrow \prod_{j \in \text{obj } J} F_j \xrightarrow[c]{d} \prod_{f \in \text{mor } J} F(\text{cod } f) \quad (9.1)$$

其中态射 c, d 的定义为: 对任意 $\lambda = (\lambda_j)_{j \in \text{obj } J} \in \prod_{j \in \text{obj } J} F_j$,

- ▶ $c(\lambda)$ 在态射 f 处的分量: $c(\lambda)_f = \lambda_{\text{cod } f}$,
- ▶ $d(\lambda)$ 在态射 f 处的分量: $d(\lambda)_f = F f(\lambda_{\text{dom } f})$ 。

注 9.4. 注意, c 和 d 都是 map 到右边这个 product 的, 这里的元素就是态射集索引的多元组全体; 所以要定义 c 和 d , 只需要定义好每个分量处的值。因此, 我们上面这个形式已经把 c 和 d 确定下来了。

下面我们利用上面两个定理, 来分析一个例子。首先, 我们给出幂等元的定义。

定义 9.5. 设 A 为集合范畴 $\mathbf{Set}$ 中的对象 (即集合), 态射 $e : A \rightarrow A$ 称为幂等元, 若满足 $e \circ e = e$ 。

因此, 幂等元 e 对应这样一个图 (函子): 这个图的指标范畴 J 为 $\bullet \rightrightarrows \bullet$, 具体作用如下:

- ▶ 对象: 仅一个对象 A ,
- ▶ 态射: 两个平行态射 $\text{id}_A : A \rightarrow A$ (恒等态射) 和 $e : A \rightarrow A$ (幂等态射)。

这个图上, 以 1 为顶点的锥的 leg, 就是一个态射: $f : 1 \rightarrow A$, 且得满足锥相容性条件:

$$f = \text{id}_A \circ f = e \circ f \quad (9.2)$$

因此, 在不考虑交换性的情况下, 每个以 1 为顶点的锥, 都和 $1 \rightarrow A$ 的一个态射一一对应; 而后者又和 A 里的元素一一对应, 因此这类“锥”的全体和 A 是一一对应的。

由于还得考虑交换性, 所以还得对 A 中的点增加一点限制, 这就是下面这个命题。

命题 9.6. 以 1 为顶点的锥的集合, 同构于 e 的不动点集 $A^e = \{a \in A \mid e(a) = a\}$, 即 $\lim F \cong A^e$ 。

证明. 由可知, 对 $* \in 1$, 有:

$$(\text{id}_A \circ f)(*) = f(*), \quad (e \circ f)(*) = e(f(*))$$

因此锥条件等价于 $f(*) = e(f(*))$ 。

又因为 $\text{Hom}(1, A) \cong A$, 态射 $f: 1 \rightarrow A$ 对应元素 $a = f(*) \in A$, 因此 $f(*) = e(f(*))$ 等价于 $a = e(a)$, 即 a 是 e 的不动点。因此以 1 为顶点的锥的集合, 与 e 的不动点集 A^e 一一对应。因此, 由定理 1.0.1 可得, $\lim F = A^e$ 。□

当然我们还可以从定理 1.0.2 出发去刻画这个极限, 我们看一下

1. 指标范畴与函子:

- ▶ 指标范畴 J : 对象集 $\text{ob}J = \{\star\}$, 态射集 $\text{mor}J = \{\text{id}_\star, e\}$,
- ▶ 函子 $F: J \rightarrow \text{Set}$: $F(\star) = A$, $F(\text{id}_\star) = \text{id}_A$, $F(e) = e$ 。

2. 计算乘积:

- ▶ 对象乘积: $\prod_{j \in \text{ob}J} F_j = F(\star) = A$, 元素为 $a \in A$,
- ▶ 态射乘积: $\prod_{f \in \text{mor}J} F(\text{cod } f) = F(\star) \times F(\star) = A \times A$, 元素为 $(x, y) \in A \times A$ 。

3. 计算态射 c, d :

- ▶ 对任意 $a \in A$, $c(a) = (a, a)$ (两个分量均为 a),
- ▶ $d(a) = (a, e(a))$ ($\text{id}_\star$ 对应分量为 a , e 对应分量为 $e(a)$)。

4. 计算等化子: 我们知道, 集合范畴里的等化子就是下面这个:

$$\text{Eq}(c, d) = \{a \in A \mid c(a) = d(a)\}$$

即 $(a, a) = (a, e(a))$, 从而 $a = e(a)$, 即不动点集 A^e 。

这和我们利用定理 1.0.1 得到的结果是一致的。写成定理 1.0.2 的形式就是下面这个图:

$$A^e \xrightarrow{s} A \xrightleftharpoons[e]{\text{id}_A} A.$$

我们继续分析这个极限的性质。这需要引入所谓收缩核的定义。

定义 9.7. 在任意范畴中, 若存在态射 $s: B \rightarrow A$, $r: A \rightarrow B$, 满足 $r \circ s = \text{id}_B$, 则称 B 是 A 的收缩核, s 为截面, r 为收缩。

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow r & & \searrow e & \\ A^e & \xrightarrow{s} & A & \xrightleftharpoons[e]{\text{id}_A} & A. \end{array}$$

反过来, 一旦我们给出一个收缩核, 我们也会得到一个幂等元。

定理 9.8. 设 B 是 A 的收缩核, 即存在态射 $s: B \rightarrow A$ 与 $r: A \rightarrow B$ 使得 $r \circ s = \text{id}_B$ 。令 $e = s \circ r: A \rightarrow A$, 则:

- (1) e 是 A 上的幂等元, 即 $e \circ e = e$;
- (2) 幂等元 e 被 B 分裂, 即 B 是平行态射 id_A 与 e 的等化子

$$B \cong \text{Eq}(\text{id}_A, e) = A^e.$$

证明. (1) 直接验证幂等性:

$$e \circ e = (s \circ r) \circ (s \circ r) = s \circ (r \circ s) \circ r = s \circ \text{id}_B \circ r = s \circ r = e.$$

因此 e 是幂等元。

(2) 证明 B 是 id_A 与 e 的等化子。首先验证 $s : B \rightarrow A$ 满足等化子条件:

$$e \circ s = (s \circ r) \circ s = s \circ (r \circ s) = s \circ \text{id}_B = s = \text{id}_A \circ s.$$

其次验证泛性质。任取态射 $f : X \rightarrow A$ 满足 $f = e \circ f$, 令 $\bar{f} = r \circ f : X \rightarrow B$, 则

$$s \circ \bar{f} = s \circ r \circ f = e \circ f = f.$$

若另有 $\bar{f}' : X \rightarrow B$ 使得 $f = s \circ \bar{f}'$, 则

$$\bar{f} = r \circ f = r \circ s \circ \bar{f}' = \text{id}_B \circ \bar{f}' = \bar{f}',$$

故分解唯一。因此 $s : B \rightarrow A$ 是 id_A 与 e 的等化子, 即 $B \cong \text{Eq}(\text{id}_A, e) = A^e$, 幂等元 e 被 B 分裂。□

如果我们把约束条件加强一点点, 就得到下面这个例子。

定义 9.9. 对群 G , 定义范畴 $\mathbf{BG}$ 如下:

- ▶ 仅一个对象, 记为 $\star$,
- ▶ 对每个 $g \in G$, 对应一个态射 $\tilde{g} : \star \rightarrow \star$,
- ▶ 态射复合: $\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2 = \widetilde{g_1 g_2}$,
- ▶ 单位态射: $\tilde{e}_G = \text{id}_\star$ (e_G 为 G 的单位元)。

定义 9.10. 函子 $X : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$ 称为左 G -集, 对应:

- ▶ 集合 $X = X(\star)$,
- ▶ 对每个 $g \in G$, 态射 $g_* = X(\tilde{g}) : X \rightarrow X$, 满足 $g_*(h_*(x)) = (gh)_*(x)$, 即群作用 $g \cdot x = g_*(x)$ 。

这里有一点符号滥用, 但是影响不大。完全同理的, 我们可以得到下面这个结果:

命题 9.11. 左 G -集 $X : \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的极限 $\lim X$, 同构于 X 的 G -不动点集 $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}$ 。

证明. 1. 锥的定义: 以 1 为顶点的锥是态射 $x : 1 \rightarrow X$, 对应元素 $x = x(*) \in X$ 。锥的相容性条件为: 对所有 $g \in G$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & X \\ & \searrow x & \\ & & \downarrow g_* \\ & & X \end{array}$$

即 $g_* \circ x = x$, 对应元素条件 $g \cdot x = x$ 对所有 $g \in G$ 成立。

2. 一一对应: 态射 $x : 1 \rightarrow X$ 一一对应于 X 中的元素 x , 锥条件等价于 x 是 G -不动点, 因此以 1 为顶点的锥的集合, 即极限 $\lim X$, 同构于 X^G 。

□

9.2 3.3 节

这一节有三个核心概念：

定义 9.12 (保持、反射与创造极限). 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子, $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{C}$ 上的一类图表 (即 $J \rightarrow \mathcal{C}$, 这里的 J 没有限制, 但通常要求是小的)。

- ▶ F 保持 $\mathcal{K}$ 类极限: 若对任意 $K \in \mathcal{K}$ 以及 K 的任意极限锥 λ , $F\lambda$ 是 FK 的极限锥。
- ▶ F 反射 $\mathcal{K}$ 类极限: 若对任意 $K \in \mathcal{K}$ 以及 K 的任意锥 λ , 只要 $F\lambda$ 是 FK 的极限锥, 就有 λ 是 K 的极限锥。
- ▶ F 创造 $\mathcal{K}$ 类极限: 若满足以下两条:
 - (1) 对任意 $K \in \mathcal{K}$, 若 FK 在 $\mathcal{D}$ 中存在极限锥 ν' , 则存在 K 的极限锥 ν 使得 $F\nu = \nu'$ (存在性与可提升性);
 - (2) F 反射 $\mathcal{K}$ 类极限。

注意, 我们这里的 ν 是存在一个, 所以可能有很多个 (当然都是同构的)。但是如果我加强到只能有一个的话, 这个定义就变成了严格创造。

定义 9.13 (严格创造极限). A functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ strictly creates limits for a given class of diagrams if for any diagram $K: J \rightarrow \mathcal{C}$ in the class and limit cone over $FK: J \rightarrow \mathcal{D}$,

- ▶ there exists a unique lift of that cone to a cone over K , and
- ▶ moreover, this lift defines a limit cone in $\mathcal{C}$.

以拉回为例, 三种性质可以概括为: 保持将极限锥送为极限锥; 反射从像锥为极限锥推出原锥为极限锥; 创造则要求像锥的极限唯一地提升为原范畴中的极限锥。其共同的基本方块为

$$\begin{array}{ccc} p & \longrightarrow & c'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ c' & \longrightarrow & c. \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} F(p) & \longrightarrow & F(c'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(c') & \longrightarrow & F(c). \end{array}$$

现在我们先回顾两个简单的 lemma, 然后证明书中的命题 3.3.3。

引理 9.14 (极限锥的同构不变性). 设 $D: J \rightarrow \mathcal{C}$ 为图表, $\mu: d \Rightarrow D$ 是 D 的极限锥。若锥 $\mu': d' \Rightarrow D$ 与 μ 同构, 即存在同构 $i: d' \xrightarrow{\cong} d$ 使得

$$\mu'_j = \mu_j \circ i, \quad \forall j \in J$$

则 μ' 也是 D 的极限锥。

也就是说, 和极限锥同构的锥一定也是极限锥。我们按照定义证明一下 (虽然在直觉上是显然的)。

证明. 任取 D 的一个锥 $\nu: e \Rightarrow D$ 。

1. 存在性: 因为 μ 是极限锥, 存在唯一态射 $f: e \rightarrow d$ 使得

$$\nu_j = \mu_j \circ f, \quad \forall j \in J.$$

令

$$f' := i^{-1} \circ f: e \rightarrow d'.$$

则

$$\mu'_j \circ f' = (\mu_j \circ i) \circ (i^{-1} \circ f) = \mu_j \circ f = \nu_j.$$

即 f' 使得 $v = \mu' \circ f'$ 。

2. 唯一性：设另有 $f'' : e \rightarrow d'$ 满足

$$v_j = \mu'_j \circ f'', \quad \forall j \in J.$$

则

$$\mu_j \circ (i \circ f'') = (\mu_j \circ i) \circ f'' = \mu'_j \circ f'' = v_j = \mu_j \circ f.$$

由 μ 极限锥的唯一性，得

$$i \circ f'' = f.$$

两边左复合 i^{-1} ：

$$f'' = i^{-1} \circ f = f'.$$

因此 μ' 满足极限锥的泛性质，故 μ' 是 D 的极限锥。 $\square$

下面这个 lemma 我们前面已经证明过了。

引理 9.15 (极限锥的本质唯一性). 给定同一图表 F 的任意两个极限锥 $\lambda : \ell \Rightarrow F$ 与 $\lambda' : \ell' \Rightarrow F$ ，存在唯一的同构 $\ell \cong \ell'$ ，使得该同构与两个极限锥的腿交换。

现在我们给出命题 3.3.3 的证明。

命题 9.16. 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子， $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{C}$ 中以固定 J 为指标的一类图表。若：

- (1) F 创造 $\mathcal{K}$ 类极限；
- (2) 对任意 $K \in \mathcal{K}$ ， $FK : J \rightarrow \mathcal{D}$ 在 $\mathcal{D}$ 中存在极限；

则：

- ▶ 对任意 $K \in \mathcal{K}$ ， K 在 $\mathcal{C}$ 中存在极限（即 $\mathcal{C}$ 具备 $\mathcal{K}$ 类极限）；
- ▶ F 保持 $\mathcal{K}$ 类极限。

证明. 首先证明 $\mathcal{C}$ 具备 $\mathcal{K}$ 类极限：对任意 $K \in \mathcal{K}$ ，由条件 (2)， FK 在 $\mathcal{D}$ 中存在极限锥 $\mu : d \Rightarrow FK$ 。又由 F 创造极限的条件，存在 K 的极限锥 $\lambda : c \Rightarrow K$ 使得 $F\lambda = \mu$ ，因此 K 在 $\mathcal{C}$ 中存在极限。

接下来证明 F 保持 $\mathcal{K}$ 类极限：任取 $K \in \mathcal{K}$ 的一个极限锥 $\lambda' : c' \Rightarrow K$ ，需证 $F\lambda' : Fc' \Rightarrow FK$ 是 FK 的极限锥。

我们仍然考虑上述证明里 K 上的极限锥 $\lambda : c \Rightarrow K$ 。由引理 2.0.1（极限锥都同构）， λ 与 λ' 同构，即存在同构 $i : c' \xrightarrow{\cong} c$ 使得 $\lambda'_j = \lambda_j \circ i$ 对所有 $j \in J$ 成立。 F 作用在两边得：

$$F\lambda'_j = F\lambda_j \circ Fi$$

即 $F\lambda'$ 与 $F\lambda$ 同构（锥同构的定义）。

由 μ 这个锥的定义可知， $F\lambda$ 与 $\mathcal{D}$ 中 FK 的极限锥 μ 相等，再由引理 2.0.1 可知，与极限锥同构的锥仍是极限锥，因此 $F\lambda'$ 是 FK 的极限锥，故 F 保持 $\mathcal{K}$ 类极限。 $\square$

9.3 特殊函子的性质

9.3.1 范畴等价的定义与刻画

定义 9.17 (范畴等价). 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, 函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. 若存在函子 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 以及自然同构:

- ▶ $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$
- ▶ $\varepsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$

则称 F 为等价函子, 称 G 为 F 的拟逆函子, 并称范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 等价, 记为 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

范畴等价有如下一个经典的刻画:

引理 9.18. 函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴等价, 当且仅当:

- (1) 全忠实 (*Full and Faithfully*): 对任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, 态射映射

$$F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$

是双射;

- (2) 本质满 (*Essentially Surjective*): 对任意 $Y \in \mathcal{D}$, 存在 $X \in \mathcal{C}$ 使得 $FX \cong Y$.

下面我们给出 lemma3.3.5 和 lemma3.3.6 的证明。

命题 9.19 (全忠实函子反射极限). 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是全忠实函子, $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{C}$ 中一类图表。若 FK 在 $\mathcal{D}$ 中存在极限, 则 F 反射 $\mathcal{K}$ 类极限。

证明. 设 $K : J \rightarrow \mathcal{C}$ 是图表, $\lambda : L \Rightarrow K$ 是 K 的锥, 且 $F\lambda : FL \Rightarrow FK$ 是 FK 的极限锥。需证 λ 是 K 的极限锥。

任取 K 的另一个锥 $\mu : M \Rightarrow K$, 需证存在唯一态射 $g : M \rightarrow L$ 使得 $\mu = \lambda \circ g$ 。

考虑 $F\mu : FM \Rightarrow FK$ 是 FK 上的锥(函子显然保持为锥)。因 $F\lambda$ 是极限锥, 存在唯一态射 $f : FM \rightarrow FL$ 使得

$$F\mu_j = F\lambda_j \circ f, \quad \forall j \in J.$$

因 F 全忠实, 存在唯一态射 $g : M \rightarrow L$ 使得 $Fg = f$ 。我们现在证明这个 g 就是我们想要的那个 g 。这些显然的: 对任意 $j \in J$,

$$F(\lambda_j \circ g) = F\lambda_j \circ Fg = F\lambda_j \circ f = F\mu_j.$$

由 F 忠实 (单射), 得 $\lambda_j \circ g = \mu_j$, 即 $\mu = \lambda \circ g$ 。

现在证明唯一性。若另有 $h : M \rightarrow L$ 满足 $\mu = \lambda \circ h$, 则 $F(\lambda_j \circ h) = F\mu_j = F(\lambda_j \circ g)$ 。由 F 忠实, 得 $Fh = Fg$, 再由全忠实得 $h = g$ 。

综上, λ 满足极限的泛性质, 是 K 的极限锥, 即 F 反射极限。 □

命题 9.20 (等价函子保持、反射、创造极限). 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴等价 (即全忠实且本质满), 则 F 保持、反射、创造任意小极限与余极限。

证明. (1) 我们先证明反射极限: 由引理 3.1.1 可知, 等价函子是全忠实的, 而我们刚证明了全忠实函子反射极限, 因此 F 反射极限。

(2) 现在证明保持极限: 设 $K : J \rightarrow \mathcal{C}$ 是图表, $\lambda : L \Rightarrow K$ 是 K 的极限锥。需证 $F\lambda : FL \Rightarrow FK$ 是 FK 的极限锥。

也就是说：任取 FK 上的锥 $v' : M' \Rightarrow FK$ ，需证存在唯一态射 $f' : M' \rightarrow FL$ 使得 $v' = F\lambda \circ f'$ 。

因为 F 本质满，所以由定义可知：存在 $M \in \mathcal{C}$ 与同构 $\varepsilon_M : FM \rightarrow M'$ 。令 $v = \varepsilon_M^{-1} \circ v' : FM \Rightarrow FK$ ，这个就是把同构和锥的每个 leg 进行左复合。精确地说就是： v' 是 FK 上的锥：对每个 $j \in J$ ，有态射 $v'_j : M' \rightarrow FK_j$ ，且满足锥的相容性（对任意 $f : j \rightarrow k$ ， $FK_f \circ v'_j = v'_k$ ）。

我们用同构 ε_M 的逆 $\varepsilon_M^{-1} : M' \xrightarrow{\cong} FM$ ，左复合到 v'_j 上，定义新的态射：

$$v_j := \varepsilon_M^{-1} \circ v'_j : F(M) \rightarrow F(K_j), \quad \forall j \in J.$$

这个态射族 $\{v_j\}_{j \in J}$ 显然就构成了以 FM 为顶点的 FK 上的锥 $v : FM \Rightarrow FK$ 。（相当于把顶点往上移动了一下）。

现在，使用函子 $G : D \rightarrow C$ 作用于这个锥：

- ▶ 顶点： $F(M) \rightarrow GF(M)$
- ▶ $\text{leg}: v_j \rightarrow G(v_j)$

于是得到 C 中 GFK 上的锥： $G : GFM \Rightarrow GFK$

和上面一样，我们使用自然同构 $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ ，复合 K 的极限锥 $\lambda : L \Rightarrow K$ ，从而构造 GFK 上的极限锥：对任意 $j \in J$ ，定义态射

$$(\eta_K \circ G\lambda)_j := \eta_{K_j} \circ G\lambda_j : GL \rightarrow GFK_j$$

这个态射族构成以 GL 为顶点的 GFK 上的极限锥 $\eta_K \circ G\lambda : GL \Rightarrow GFK$ 。

由 GFK 上极限锥的定义：存在唯一态射 $g : GFM \rightarrow GL$ 使得

$$Gv_j = (\eta_{K_j} \circ G\lambda_j) \circ g, \quad \forall j \in J$$

又因为我们有自然同构（前面已经提到）

$$\eta_M : M \xrightarrow{\cong} GF(M)$$

考虑 η_M 和 g 的复合，我们得到一个从 M 到 GL 的态射：

$$g \circ \eta_M : M \rightarrow GL.$$

注意到 $GL = GFL$ ，且由自然同构 $\eta_L : L \xrightarrow{\cong} GFL = GL$ ，我们将态射 $g \circ \eta_M$ 通过 η_L^{-1} 复合，得到：

$$\eta_L^{-1} \circ g \circ \eta_M : M \rightarrow L.$$

记该态射为 $\tilde{g} : M \rightarrow L$ ，则由 G 的全忠实性（等价函子的态射双射）， $\tilde{g}$ 是唯一满足

$$G\tilde{g} = g \circ \eta_M$$

的态射。

令 $f' = \varepsilon_M \circ F\tilde{g} : M' \rightarrow FL$ ，验证：

$$\begin{aligned} F\lambda \circ f' &= F\lambda \circ \varepsilon_M \circ F\tilde{g} \\ &= \varepsilon_M \circ F(\lambda \circ \tilde{g}) \\ &= \varepsilon_M \circ Fv \\ &= v'. \end{aligned}$$

唯一性由 g 的唯一性、 η_M 和 ε_M 的同构性保证，因此 $F\lambda$ 是 FK 的极限锥，即 F 保持极限。

余极限部分完全对偶，证明略去。 □

注 9.21. 创造极限的部分我暂时还没看懂这个证明。

下面是另外一个大定理：首先我们给出范畴连通的定义。

定义 9.22. 范畴 $\mathcal{J}$ 是连通的，当且仅当：

1. $\mathcal{J}$ 非空；
2. 在 $\mathcal{J}$ 的基础有向图中，任意一对对象都可以通过有限的之字形（zig-zag）态射连接。

图表是连通的，当且仅当它以连通范畴为指标。

这里的基础有向图 (Underlying Directed Graph) 就是把范畴 $\mathcal{J}$ 去掉态射的复合和恒等性，只保留对象作为顶点、态射作为有向边，得到的有向图就是 $\mathcal{J}$ 的基础有向图。

下面我们回顾一下切片范畴的定义

定义 9.23 (切片范畴). 设 $\mathcal{C}$ 为范畴， $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 中的对象，切片范畴 $c/\mathcal{C}$ 的结构如下：

- ▶ 对象：所有以 c 为源的态射 $f : c \rightarrow x$ ，记为 (x, f) （也可简记为 f ）；
- ▶ 态射：从对象 (x, f) 到对象 (y, g) 的态射，是 $\mathcal{C}$ 中满足交换条件 $g = h \circ f$ 的态射 $h : x \rightarrow y$ ；
- ▶ 复合与单位：完全继承 $\mathcal{C}$ 的复合（ $h' \circ h$ 仍满足交换性）和单位（ $\text{id}_x : (x, f) \rightarrow (x, f)$ ，满足 $f = \text{id}_x \circ f$ ）。

我们的证明还需要一个 lemma。

引理 9.24. 设 $\{\lambda_j : L \rightarrow X_j\}_{j \in J}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中图 $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ 的极限锥。若对任意态射 $a, b : T \rightarrow L$ 满足

$$\lambda_j \circ a = \lambda_j \circ b \quad (\forall j \in J),$$

则 $a = b$ 。

证明. 1. 定义态射族 $\phi_j = \lambda_j \circ a : T \rightarrow X_j$ 。对图中任意态射 $f : i \rightarrow j$ ，由 $\{\lambda_j\}$ 是锥，有 $F(f) \circ \lambda_i = \lambda_j$ 。于是

$$F(f) \circ \phi_i = F(f) \circ (\lambda_i \circ a) = (F(f) \circ \lambda_i) \circ a = \lambda_j \circ a = \phi_j,$$

故 $\{T, \{\phi_j\}\}$ 构成图 F 的一个锥。

2. 由极限的泛性质，存在唯一的态射 $k : T \rightarrow L$ 使得

$$\phi_j = \lambda_j \circ k \quad (\forall j \in J).$$

3. 注意到 a 满足 $\lambda_j \circ a = \phi_j$ ，同时由题设， b 也满足 $\lambda_j \circ b = \phi_j$ 。因此， $a = k = b$ 。 □

下面我们来证明命题 3.3.8。

命题 9.25. 对任意范畴 $\mathcal{C}$ 与对象 $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ，遗忘函子 $\Pi : c/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 严格创建：

- (i) $\mathcal{C}$ 中存在的所有极限；
- (ii) $\mathcal{C}$ 中存在的所有连通余极限。

证明. (1) 我们首先证明：在切片范畴里定义一个函子 $D = (K, \kappa) : \mathcal{J} \rightarrow c/\mathcal{C}$ ，等价于定义一个函子 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ，同时带有一个以 c 为顶点的锥 $\kappa : c \rightrightarrows K$ 。

我们将函子 $D : \mathcal{J} \rightarrow c/\mathcal{C}$ 的条件逐行翻译为 $\mathcal{C}$ 中的条件：

1. 对象：根据切片范畴的对象定义， $D(j)$ 一定是一个以 c 为源的态射，因此记

$$D(j) = (Kj, \kappa_j), \quad \text{其中 } \kappa_j : c \rightarrow Kj \in \mathcal{C}.$$

其中 Kj 是 $\mathcal{C}$ 中的对象（切片对象的靶）， κ_j 是 $\mathcal{C}$ 中从 c 到 Kj 的态射（切片对象本身）。

这一步给出了 $\mathcal{C}$ 中图表 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 的对象部分（即 j 映射到 Kj ），以及锥 $\kappa : c \Rightarrow K$ 的分量 κ_j 。

2. 态射：根据切片范畴的态射定义， $D(f) : D(j) \rightarrow D(j')$ 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射，因此对应 $\mathcal{C}$ 中一个态射 $h : Kj \rightarrow Kj'$ ，且必须满足切片态射的交换条件：

$$\kappa_{j'} = h \circ \kappa_j.$$

将这个 h 记为 Kf ，即 $Kf : Kj \rightarrow Kj' \in \mathcal{C}$ ，于是交换条件变为

$$\kappa_{j'} = Kf \circ \kappa_j. \quad (9.3)$$

这一步得到了 $\mathcal{C}$ 中图表 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 的态射部分（即把 f 映射为 Kf ），且式 (3) 正是锥 $\kappa : c \Rightarrow K$ 的交换性条件：对任意 $f : j \rightarrow j' \in \mathcal{J}$ ， $Kf \circ \kappa_j = \kappa_{j'}$ ，即所有从 c 出发的态射与图表 K 交换。

□

(2) 问题重述：遗忘函子 $\Pi : c/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 由 $\Pi(Kj, \kappa_j) = Kj$ ， $\Pi(Kf) = Kf$ 定义。我们需要证明：若图表 $K = \Pi \circ (K, \kappa) : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在极限锥，则该极限锥可唯一提升为 $c/\mathcal{C}$ 中以 (K, κ) 为指标的极限锥，且该锥是 $c/\mathcal{C}$ 中的极限锥。

即给定图表 $(K, \kappa) : \mathcal{J} \rightarrow c/\mathcal{C}$ ，其遗忘图表为

$$\mathcal{J} \xrightarrow{(K, \kappa)} c/\mathcal{C} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{C}.$$

设 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的极限锥为 $\lambda : \ell \Rightarrow K$ ，其分量为 $\{\lambda_j : \ell \rightarrow Kj \mid j \in \text{Ob}(\mathcal{J})\}$ 。由极限的泛性质，对锥 $\kappa : c \Rightarrow K$ ，存在唯一的态射 $t : c \rightarrow \ell$ ，使得对所有 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ，有

$$\lambda_j \circ t = \kappa_j.$$

我们断言： (ℓ, t) 是 $c/\mathcal{C}$ 中以 (K, κ) 为指标的图表的极限锥顶点，且该锥的分量为 $\hat{\lambda}_j = \lambda_j : (\ell, t) \rightarrow (Kj, \kappa_j)$ （这相当于把后面这个 map 的 domain 和 codomain，加上对应的到达点而已）

证明. 首先验证 $\hat{\lambda}_j$ 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射且满足交换性：而根据切片范畴的态射定义，需满足交换条件

$$\kappa_j = \lambda_j \circ t$$

而这正是极限泛性质给出的等式，因此 $\hat{\lambda}_j$ 是合法态射且显然交换。

接下来验证该锥是 $c/\mathcal{C}$ 中的极限锥（我们只证明泛性质）：对任意 $c/\mathcal{C}$ 中以 (K, κ) 为指标的锥，顶点为 (x, s) ，分量为 $h_j : (x, s) \rightarrow (Kj, \kappa_j)$ ，则由切片态射的定义， h_j 满足

$$\kappa_j = h_j \circ s$$

此时 $\{h_j : x \rightarrow Kj\}$ 构成 $\mathcal{C}$ 中以 K 为指标的锥，顶点为 x 。

由 $\mathcal{C}$ 中极限 $\lambda : \ell \Rightarrow K$ 的泛性质，存在唯一的态射 $u : x \rightarrow \ell$ ，使得对所有 j ，有 $\lambda_j \circ u = h_j$ 。

我们需要验证 u 确实是 $c/\mathcal{C}$ 中从 (x, s) 到 (ℓ, t) 的态射，即满足交换条件

$$t = u \circ s$$

: 对任意 j , 有

$$\lambda_j \circ (u \circ s) = (\lambda_j \circ u) \circ s = h_j \circ s = \kappa_j = \lambda_j \circ t.$$

由 lemma3.1.2, 我们知道若 $\lambda_j \circ a = \lambda_j \circ b$ 对所有 j 成立, 则 $a = b$ 。

因此我们马上可得

$$u \circ s = t$$

因此 u 是 $c/\mathcal{C}$ 中的合法态射 (因为满足交换性)。

唯一性是显然的 (因为 $\mathcal{C}$ 中有这个的唯一性)。综上, (ℓ, t) 是 $c/\mathcal{C}$ 中 (K, κ) 的极限, 遗忘函子 Π 将其映射为 $\mathcal{C}$ 中的极限 ℓ , 因此 Π 严格创建该极限。□

当 $\mathcal{J}$ 是平行对 $a \rightrightarrows b$ 时, 提升过程由下图表示:

$$\begin{array}{ccccc} c & \xrightarrow{\kappa_a} & K(a) & \xrightleftharpoons[K(g)]{K(f)} & K(b) \\ & \searrow t & \uparrow \lambda_a & & \nearrow \lambda_b \\ & & \ell & & \end{array}$$

我们给一个简单情况下的示意图, 帮助我们看懂上述思路。

现在我们来证明第二部分:

命题 9.26. 遗忘函子 $\Pi: c/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 严格创建 $\mathcal{C}$ 中所有连通余极限。即: 对任意连通范畴 J , 任意图表 $K: J \rightarrow c/\mathcal{C}$, 若 $\Pi \circ K = \bar{K}: J \rightarrow \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在余极限 $(\mu_j: \bar{K}_j \rightarrow p)_{j \in J}$, 则

1. K 在 $c/\mathcal{C}$ 中存在唯一的余极限 $(\tilde{\mu}_j: K_j \rightarrow (p, \tilde{f}))_{j \in J}$;
2. Π 将该余极限映为 $\mathcal{C}$ 中的原余极限 $(\mu_j)_{j \in J}$ 。

证明. 步骤 1: 明确图表结构

设 $K: J \rightarrow c/\mathcal{C}$ 是 $c/\mathcal{C}$ 中的图表, 其中 J 连通。对每个 $j \in J$,

$$K_j = (\bar{K}_j, \kappa_j: c \rightarrow \bar{K}_j),$$

即切片范畴对象; 对 J 中任意态射 $\alpha: j \rightarrow j'$,

$$K\alpha: (\bar{K}_j, \kappa_j) \rightarrow (\bar{K}_{j'}, \kappa_{j'})$$

是 $\mathcal{C}$ 中满足 $\kappa_{j'} = K\alpha \circ \kappa_j$ 的态射 $K\alpha: \bar{K}_j \rightarrow \bar{K}_{j'}$ 。

已知 $\bar{K}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的余极限为 $(\mu_j: \bar{K}_j \rightarrow p)_{j \in J}$, 即对任意 $\alpha: j \rightarrow j'$, 有

$$\mu_{j'} \circ K\alpha = \mu_j.$$

步骤 2: 构造切片范畴中的余极限对象

任取 $j_0 \in J$, 定义

$$\tilde{f} := \mu_{j_0} \circ \kappa_{j_0}: c \rightarrow \bar{K}_{j_0} \rightarrow p.$$

良定义验证: 对任意 $j_1 \in J$, 由 J 连通, 存在态射链

$$j_0 \xrightarrow{\alpha_1} j'_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} j_1.$$

由切片范畴态射的交换性 $\kappa_{j_{k+1}} = K\alpha_k \circ \kappa_{j_k}$ 与余极限交换性 $\mu_{j_{k+1}} \circ K\alpha_k = \mu_{j_k}$, 递推可得

$$\mu_{j_1} \circ \kappa_{j_1} = \mu_{j_0} \circ \kappa_{j_0} = \tilde{f}.$$

故 $\tilde{f}$ 与 j_0 的选取无关。

步骤 3: 构造切片范畴中的余极限锥

对每个 $j \in J$, 定义 $c/\mathcal{C}$ 中的态射

$$\tilde{\mu}_j: K_j = (\bar{K}_j, \kappa_j) \rightarrow (p, \tilde{f})$$

为 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\mu_j: \bar{K}_j \rightarrow p$ 。

1. 合法性: $\tilde{f} = \mu_j \circ \kappa_j$, 由 $\tilde{f}$ 的定义直接成立;
2. 锥交换性: 对任意 $\alpha: j \rightarrow j'$,

$$\tilde{\mu}_{j'} \circ K\alpha = \mu_{j'} \circ K\alpha = \mu_j = \tilde{\mu}_j,$$

故 $(\tilde{\mu}_j)_{j \in J}$ 是 K 在 $c/\mathcal{C}$ 中的锥。

步骤 4: 验证余极限的泛性质

设 $(v_j: K_j \rightarrow (q, g: c \rightarrow q))_{j \in J}$ 是 K 在 $c/\mathcal{C}$ 中的任意锥。

4.1 存在性

由 v_j 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射, 得

$$g = v_j \circ \kappa_j, \quad \forall j \in J.$$

且 $(v_j: \bar{K}_j \rightarrow q)_{j \in J}$ 是 $\bar{K}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的锥。

由 $\mathcal{C}$ 中余极限的泛性质, 存在唯一态射 $h: p \rightarrow q$ 使得

$$h \circ \mu_j = v_j, \quad \forall j \in J.$$

验证 h 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射:

$$g = v_j \circ \kappa_j = (h \circ \mu_j) \circ \kappa_j = h \circ (\mu_j \circ \kappa_j) = h \circ \tilde{f}.$$

4.2 唯一性

若存在 $h': (p, \tilde{f}) \rightarrow (q, g)$ 满足

$$h' \circ \tilde{\mu}_j = v_j \implies h' \circ \mu_j = v_j,$$

由 $\mathcal{C}$ 中余极限泛性质的唯一性, 得 $h' = h$ 。

步骤 5: 遗忘函子保持余极限

Π 将 $c/\mathcal{C}$ 中的余极限锥 $(\tilde{\mu}_j)$ 映为 $\mathcal{C}$ 中的原余极限锥 (μ_j) , 故 Π 严格保持该连通余极限。 $\square$

10 site 层与函子范畴

10.1 site 与层

定义 10.1. 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。集合预层是指一个反变函子

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

所有集合预层构成的范畴记作 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ ，其中态射为自然变换。

注 10.2. 设 $f : V \rightarrow U$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射， $s \in \mathcal{F}(U)$ 是 $\mathcal{F}$ 在 U 上的截面。记

$$s|_V := f^*(s) = \mathcal{F}(f)(s),$$

称为 s 沿 f 的限制。若 $W \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} U$ 是复合态射，则马上由函子性得到

$$(s|_V)|_W = s|_W.$$

注 10.3. 对任意对象 $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ，可表函子

$$\text{Hom}(-, U) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad V \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, U)$$

是一个预层，称为由 U 代表的可表预层。

现在我们准备定义 site。site 由两个部分组成，一个是范畴，一个是 cover：

定义 10.4. 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。以 U 为目标的态射族是指：

- ▶ 一个对象 $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ，
- ▶ 一个指标集 I ，
- ▶ 对每个 $i \in I$ ，配备态射 $U_i \rightarrow U$ 。

记作 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ ，允许指标集 $I = \emptyset$ 。

定义 10.5. 一个 site 是一个二元组 $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ ，其中：

- ▶ $\mathcal{C}$ 是范畴；
- ▶ $\text{Cov}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 中若干态射族（这些态射族称为覆盖）构成的集合，满足以下三条公理：

1. 若 $V \rightarrow U$ 为同构，则单点族 $\{V \rightarrow U\} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ ；
2. 若 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ ，且每个 $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}_{j \in J_i} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ ，则复合族

$$\{V_{ij} \rightarrow U\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(\mathcal{C});$$

3. 若 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ ，任取态射 $g : V \rightarrow U$ ，则拉回 $U_i \times_U V$ 存在，且基变换族

$$\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C}).$$

注 10.6. 定义里的这个拉回是下面这个：

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_U V & \xrightarrow{pr_2} & V \\ pr_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ U_i & \xrightarrow{f_i} & U \end{array}$$

所以公理 3 的意思就是：我们原本在 U 上有一层覆盖，现在我们通过一个态射 $g: V \rightarrow U$ 来观察 V 。为了在 V 上也得到一个覆盖，我们将每一个 U_i 拉回到 V 的上方，得到 $U_i \times_U V$ 。这组拉回后的对象通过 pr_2 态射“投影”到 V 上，会构成 V 的一个覆盖。

最经典的 site 就是下面这个。

例 10.7. 设 X 为拓扑空间，定义开集范畴 X_{zar} ：

- ▶ 对象： X 的全体开子集；
- ▶ 态射：若 $V \subseteq U$ 为开集包含，则存在唯一态射 $V \rightarrow U$ 。

定义覆盖：

$$Cov(X_{zar}) = \left\{ \{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \mid \bigcup_{i \in I} U_i = U \right\}.$$

验证该结构为 site：

1. 若 $V \rightarrow U$ 是同构，则 $U = V$ （因为是在开集范畴里），单点覆盖 $\{U \rightarrow U\}$ 当然满足并为自身，所以属于 Cov ；
2. 若 $\{U_i \rightarrow U\}$ 覆盖 U ， $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}$ 覆盖 U_i ，则

$$\bigcup_{i,j} V_{ij} = \bigcup_i \left(\bigcup_j V_{ij} \right) = \bigcup_i U_i = U,$$

复合族为覆盖；

3. 任取 $V \rightarrow U$ ，我们有： $U_i \times_U V = U_i \cap V$ ，且

$$\bigcup_i (U_i \cap V) = \left(\bigcup_i U_i \right) \cap V = V,$$

基变换族仍为覆盖。

因此 $(X_{zar}, Cov(X_{zar}))$ 是 site。

注意，这里使用了一个结论：在开集范畴里，两个集合的拉回，就是二者的交。我们来证明一下。

证明. 根据拉回的泛性质定义，我们需要验证 $U_i \cap V$ 满足拉回对象的两个条件：

(1) 首先证明图交换：在 X_{zar} 中，态射就是开集的包含关系。由于 $U_i \cap V \subseteq U_i$ 且 $U_i \cap V \subseteq V$ ，因此存在唯一的包含映射：

$$pr_1: U_i \cap V \rightarrow U_i, \quad pr_2: U_i \cap V \rightarrow V$$

由于 $U_i \subseteq U$ 且 $V \subseteq U$ ，上述映射复合后对应的都是包含关系 $U_i \cap V \subseteq U$ ，故下图是交换的：

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap V & \xrightarrow{pr_2} & V \\ pr_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ U_i & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$

(2) 接着证明泛性质：设存在另一个开集 W 以及态射 $q_1 : W \rightarrow U_i$ 和 $q_2 : W \rightarrow V$ ，使得图表交换（即 $i \circ q_1 = g \circ q_2$ ）。在开集范畴中，这等价于：

$$W \subseteq U_i \quad \text{且} \quad W \subseteq V$$

因此：

$$W \subseteq (U_i \cap V)$$

由 X_{zar} 的定义可知：存在唯一的态射（包含映射） $h : W \rightarrow U_i \cap V$ ，使得图都交换（交换是显然的）。□

接下来我们准备在 site 上定义层。需要指出的是，我们暂时只研究集合预层和集合层。设 $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ 为一个 site， $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上的集合预层。

任取覆盖 $\{f_i : U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ 。由 site 公理 (3) 可知：对任意指标对 $(i_0, i_1) \in I \times I$ ，纤维积 $U_{i_0} \times_U U_{i_1}$ 存在。对于每一对 (i_0, i_1) ，存在两个典范投影态射（拉回本身提供的两个态射）：

$$\text{pr}_{i_0} : U_{i_0} \times_U U_{i_1} \rightarrow U_{i_0}, \quad \text{pr}_{i_1} : U_{i_0} \times_U U_{i_1} \rightarrow U_{i_1}.$$

利用预层 $\mathcal{F}$ 的反变性，这些投影诱导了如下映射：

$$\text{pr}_{i_0}^* : \mathcal{F}(U_{i_0}) \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0} \times_U U_{i_1}), \quad \text{pr}_{i_1}^* : \mathcal{F}(U_{i_1}) \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0} \times_U U_{i_1}).$$

这两个 map 就是 $\mathcal{F}(U_i)$ ($\mathcal{F}(U_{i_1})$) 里的截面 s ，沿着 pr_{i_0} (pr_{i_1}) 的限制。也就是说：

- ▶ $\text{pr}_{i_0}^*(s_{i_0}) = \mathcal{F}(\text{pr}_{i_0})(s_{i_0}) = s_{i_0}|_{U_{i_0} \times_U U_{i_1}}$
- ▶ $\text{pr}_{i_1}^*(s_{i_1}) = \mathcal{F}(\text{pr}_{i_1})(s_{i_1}) = s_{i_1}|_{U_{i_0} \times_U U_{i_1}}$

我们后面直接使用限制的那个记号（最右边那个）。

由此，我们可以定义如下映射：乘积集合之间的两个自然映射：

$$\text{pr}_0^*, \text{pr}_1^* : \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i_0, i_1) \in I \times I} \mathcal{F}(U_{i_0} \times_U U_{i_1}).$$

具体而言，对于左侧的一个族 $(s_i)_{i \in I}$ ，映射作用定义为：

$$\text{pr}_0^*((s_i)_{i \in I}) = \left(\text{pr}_{i_0}^*(s_{i_0}) \right)_{(i_0, i_1) \in I \times I}, \quad \text{pr}_1^*((s_i)_{i \in I}) = \left(\text{pr}_{i_1}^*(s_{i_1}) \right)_{(i_0, i_1) \in I \times I}.$$

我们还可以如下自然地定义限制 map：

$$\rho : \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i), \quad s \mapsto (s|_{U_i})_{i \in I},$$

命题 10.8. 对任意 $s \in \mathcal{F}(U)$ ，必有等式 $\text{pr}_0^*(\rho(s)) = \text{pr}_1^*(\rho(s))$ 。

证明. 根据定义， $\rho(s)$ 的分量是 $s|_{U_i} = \mathcal{F}(f_i)(s)$ 。要证等式成立，只需证对每一对指标 (i_0, i_1) ，其在乘积中的分量相等，即：

$$\text{pr}_{i_0}^*(s|_{U_{i_0}}) = \text{pr}_{i_1}^*(s|_{U_{i_1}}) \in \mathcal{F}(U_{i_0} \times_U U_{i_1}).$$

考虑如下纤维积定义的交换图表：

$$\begin{array}{ccc} U_{i_0} \times_U U_{i_1} & \xrightarrow{\text{pr}_{i_1}} & U_{i_1} \\ \text{pr}_{i_0} \downarrow & \searrow h & \downarrow f_{i_1} \\ U_{i_0} & \xrightarrow{f_{i_0}} & U \end{array}$$

由于图表交换, $f_{i_0} \circ \text{pr}_{i_0} = f_{i_1} \circ \text{pr}_{i_1} = h$ 。对该图表应用反变函子 $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U_{i_0} \times_U U_{i_1}) & \xleftarrow{\text{pr}_{i_1}^*} & \mathcal{F}(U_{i_1}) \\ \text{pr}_{i_0}^* \uparrow & \nwarrow h^* & \uparrow f_{i_1}^* \\ \mathcal{F}(U_{i_0}) & \xleftarrow{f_{i_0}^*} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

对于 $s \in \mathcal{F}(U)$, 沿着两个路径作用:

- ▶ 路径 1: $\text{pr}_{i_0}^*(f_{i_0}^*(s)) = \text{pr}_{i_0}^*(s|_{U_{i_0}})$
- ▶ 路径 2: $\text{pr}_{i_1}^*(f_{i_1}^*(s)) = \text{pr}_{i_1}^*(s|_{U_{i_1}})$

由函子的复合性质 $\text{pr}_{i_0}^* \circ f_{i_0}^* = (f_{i_0} \circ \text{pr}_{i_0})^* = h^* = (f_{i_1} \circ \text{pr}_{i_1})^* = \text{pr}_{i_1}^* \circ f_{i_1}^*$, 两路径结果相等。 $\square$

下面给出层的定义。事实上, 我们利用等化子去定义层。

定义 10.9. 设 $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ 为 site, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上的集合预层。若对任意覆盖 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$, 如下序列:

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\text{pr}_0^*, \text{pr}_1^*} \prod_{(i_0, i_1) \in I \times I} \mathcal{F}(U_{i_0} \times_U U_{i_1}) \quad (10.1)$$

为集合范畴中的等化子 (Equalizer), 则称 $\mathcal{F}$ 为该 site 上的层。

由命题 1.0.1, 我们知道预层就已经可以使得两个 path 相同了, 所以层保证的是泛性质。

事实上, 当 site 取为我们前面例子里的那个 site 时, 上面这样定义的层, 就是我们熟知的那种经典的层的定义。这需要用到等化子的一个性质:

命题 10.10. 设 $\mathcal{C}$ 为任意范畴,

$$E \xrightarrow{e} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

是 f, g 的等化子, 则 e 是单态射。

证明. 单态射的定义是: 对任意对象 A 与任意态射 $\alpha_1, \alpha_2: A \rightarrow E$,

$$e \circ \alpha_1 = e \circ \alpha_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2.$$

设 $e \circ \alpha_1 = e \circ \alpha_2$, 记

$$h = e \circ \alpha_1 = e \circ \alpha_2.$$

由等化子的定义, $f \circ e = g \circ e$, 因此

$$f \circ h = f \circ e \circ \alpha_1 = g \circ e \circ \alpha_1 = g \circ h.$$

根据等化子的泛性质, 存在唯一态射 $\tilde{h}: A \rightarrow E$ 使得

$$e \circ \tilde{h} = h.$$

由于 α_1 与 α_2 都满足

$$e \circ \alpha_1 = h, \quad e \circ \alpha_2 = h,$$

由唯一性得

$$\alpha_1 = \tilde{h} = \alpha_2.$$

故 e 是单态射。 □

下面我们开始证明开集范畴构成的 site 上定义的层，就是我们熟知的那种经典的层的定义。

当 site 是 $(X_{\text{zar}}, \text{Cov}(X_{\text{zar}}))$ 时，(1) 这个等化子序列变为下面这个（其实就是拉回可以写成交的形式）：

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i_0, i_1} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1})$$

我们只需要证明满足层的两个公理：

(1) 任取 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ ，若对所有 i 满足

$$s|_{U_i} = t|_{U_i},$$

此即： $\rho(s) = \rho(t)$ 。而由定理 1.0.2，限制映射

$$\rho : \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i)$$

是单射，故 $s = t$ 。

(2) 设 $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$ 是覆盖 $\{U_i\}$ 下的一族截面，满足相交开集上的相容条件

$$s_{i_0}|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}} = s_{i_1}|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}}, \quad \forall i_0, i_1.$$

该等式恰好等价于

$$\text{pr}_0^*((s_i)) = \text{pr}_1^*((s_i)). \quad (10.2)$$

构造单点集 $A = \{*\}$ ，定义集合映射

$$h : \{*\} \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i), \quad h(*) := (s_i)_i.$$

因此 (2) 即下面这个等式

$$\text{pr}_0^* \circ h = \text{pr}_1^* \circ h.$$

由等化子的泛性质，存在唯一映射

$$\tilde{h} : \{*\} \rightarrow \mathcal{F}(U),$$

满足交换关系 $\rho \circ \tilde{h} = h$ 。记截面

$$s := \tilde{h}(*) \in \mathcal{F}(U).$$

代入交换式得

$$\rho(s) = \rho(\tilde{h}(*)) = h(*) = (s_i)_i.$$

因此 ρ 的定义 $\rho(s) = (s|_{U_i})_i$ ，因此分量相等即得

$$s|_{U_i} = s_i, \quad \forall i.$$

最后证明 s 的唯一性。假设存在另一截面 $s' \in \mathcal{F}(U)$ 满足 $s'|_{U_i} = s_i$ ，则马上有：

$$\rho(s') = (s_i)_i = \rho(s).$$

由等化子态射 ρ 为单态射，可得 $s' = s$ ，即 s 唯一。

10.2 一些重要的命题

命题 10.11 (等价函子保持、反射、创造极限). 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴等价 (即全忠实且本质满), 则 F 保持、反射、创造任意小极限与余极限。

证明. (1) 我们先证明反射极限: 由引理可知, 等价函子是全忠实的, 而全忠实函子反射极限, 因此 F 反射极限。

(2) 现在证明保持极限: 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴等价函子, 由定义, 存在函子 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, 以及自然同构:

$$\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F, \quad \varepsilon : F \circ G \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

设 $K : J \rightarrow \mathcal{C}$ 是图表, 其极限锥为 $\lambda : L \Rightarrow K$ 。我们需证 $F(\lambda) : F(L) \Rightarrow F(K)$ 是 $F(K)$ 的极限锥。

步骤 1: 构造 $F(K)$ 上的锥 $v : F(M) \Rightarrow F(K)$

任取 $F(K)$ 上的锥 $v' : M' \Rightarrow F(K)$ 。由 F 的本质满性, 存在 $M \in \mathcal{C}$ 和同构 $\varphi : F(M) \xrightarrow{\cong} M'$ 。定义新锥 $v_j := v'_j \circ \varphi$ 。该坐标变换如下:

$$\begin{array}{ccc} F(M) & & \\ \cong \downarrow \varphi & \searrow v_j & \\ M' & \xrightarrow{v'_j} & F(K(j)) \end{array}$$

相容性验证: $F(K(f)) \circ v_j = F(K(f)) \circ v'_j \circ \varphi = v'_k \circ \varphi = v_k$, 故 v 是 $F(K)$ 上的锥。

步骤 2: 对 v 应用 G , 得到 $\mathcal{C}$ 中的锥 $G(v)$

函子 G 作用于锥 v , 得到顶点为 $G(F(M))$, leg 为 $G(v_j)$ 的相容锥。

步骤 3: 构造 $G(F(K))$ 的极限锥

由自然同构 η , $\eta_K : K \Rightarrow G(F(K))$ 是图表间的自然同构。因为 $\lambda : L \Rightarrow K$ 是极限锥, 所以 $\eta_K \circ \lambda : L \Rightarrow G(F(K))$ 是 $G(F(K))$ 的极限锥。

步骤 4: 利用极限的泛性质, 得到唯一态射 $g : G(F(M)) \rightarrow L$

存在唯一的 $g : G(F(M)) \rightarrow L$ 使得 $G(v_j) = (\eta_{K(j)} \circ \lambda_j) \circ g$ 对所有 j 成立。

步骤 5: 定义 $\tilde{g} : M \rightarrow L$ 并验证 $F(\lambda) \circ F(\tilde{g}) = v$

定义 $\tilde{g} = g \circ \eta_M : M \rightarrow L$ 。利用 η 的自然性, 我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\tilde{g}} & L & \xrightarrow{\lambda_j} & K(j) \\ \cong \downarrow \eta_M & & \cong \downarrow \eta_L & & \cong \downarrow \eta_{K(j)} \\ GF(M) & \xrightarrow{GF(\tilde{g})} & GF(L) & \xrightarrow{GF(\lambda_j)} & GF(K(j)) \\ & & \searrow G(v_j) & & \nearrow \end{array}$$

由图可知 $G(F(\lambda_j) \circ \tilde{g}) \circ \eta_M = G(v_j) \circ \eta_M$ 。消去同构 η_M 并利用 G 的忠实性反射等式, 得 $F(\lambda_j) \circ F(\tilde{g}) = v_j$ 。

步骤 6: 构造 $f' : M' \rightarrow F(L)$ 并验证

定义 $f' = F(\tilde{g}) \circ \varphi^{-1} : M' \rightarrow F(L)$ 。通过步骤 1 的变换, 易证 $F(\lambda_j) \circ f' = v'_j$ 且唯一性由 φ 为同构保证。综上, F 保持极限。

(3) 证明 F 创造极限：

设 $\nu : N \Rightarrow F(K)$ 是 $F(K)$ 在 $\mathcal{D}$ 中的任意极限锥。

步骤 1-2：转换到 $F(L)$ 由本质满性，取 $L \in \mathcal{C}$ 及 $\varphi : F(L) \xrightarrow{\cong} N$ 。令 $\mu_j := \nu_j \circ \varphi$ ，则 $\mu : F(L) \Rightarrow F(K)$ 亦为极限锥。

步骤 3：构造 K 上的锥 $\lambda : L \Rightarrow K$ 定义 $\lambda_j := \eta_{K(j)}^{-1} \circ G(\mu_j) \circ \eta_L$ 。其构造对应如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda_j} & K(j) \\ \cong \downarrow \eta_L & & \cong \downarrow \eta_{K(j)} \\ GF(L) & \xrightarrow{G(\mu_j)} & GF(K(j)) \end{array}$$

步骤 4：验证 $F(\lambda) = \mu$ 利用三角恒等式 $\varepsilon_{F(L)} \circ F(\eta_L) = \text{id}_{F(L)}$ 和 ε 的自然性：

$$\begin{array}{ccccc} F(L) & \xrightarrow{F(\eta_L)} & FGF(L) & \xrightarrow{FG(\mu_j)} & FGF(K(j)) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \varepsilon_{F(L)} & & \downarrow \varepsilon_{F(K(j))} \\ & & F(L) & \xrightarrow{\mu_j} & F(K(j)) \end{array}$$

由上图路径复合可知 $F(\lambda_j) = \varepsilon_{F(K(j))} \circ FG(\mu_j) \circ F(\eta_L) = \mu_j$ 。

步骤 5：证明 λ 是极限锥 因为 $F(\lambda) = \mu$ 是极限锥且 F 反射极限，故 λ 必为 K 的极限锥。

余极限为完全对偶结论。从而 F 同样保持、反射、创造任意小余极限。 □

注 10.12. 余极限部分完全对偶，证明略去。

下面是另外一个大定理：首先我们给出范畴连通的定义。

定义 10.13. 范畴 $\mathcal{J}$ 是连通的，当且仅当：

1. $\mathcal{J}$ 非空；
2. 在 $\mathcal{J}$ 的基础有向图中，任意一对对象都可以通过有限的之字形 (zig-zag) 态射连接。

图表是连通的，当且仅当它以连通范畴为指标。

这里的基础有向图 (Underlying Directed Graph) 就是把范畴 $\mathcal{J}$ 去掉态射的复合和恒等性，只保留对象作为顶点、态射作为有向边，得到的有向图就是 $\mathcal{J}$ 的基础有向图。

之字形路径是连接两个对象 a, b 的一条“来回走”的箭头序列，允许箭头正向或反向（反向就是“逆方向的态射”，不要求实际存在逆态射）

下面我们回顾一下切片范畴的定义

定义 10.14 (切片范畴). 设 $\mathcal{C}$ 为范畴， $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 中的对象，切片范畴 $c/\mathcal{C}$ 的结构如下：

- ▶ 对象：所有以 c 为源的态射 $f : c \rightarrow x$ ，记为 (x, f) （也可简记为 f ）；
- ▶ 态射：从对象 (x, f) 到对象 (y, g) 的态射，是 $\mathcal{C}$ 中满足交换条件 $g = h \circ f$ 的态射 $h : x \rightarrow y$ ；
- ▶ 复合与单位：完全继承 $\mathcal{C}$ 的复合 ($h' \circ h$ 仍满足交换性) 和单位 ($\text{id}_x : (x, f) \rightarrow (x, f)$ ，满足 $f = \text{id}_x \circ f$)。

我们的证明还需要一个 lemma。

引理 10.15. 设 $\{\lambda_j : L \rightarrow X_j\}_{j \in J}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中图 $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ 的极限锥。若对任意态射 $a, b : T \rightarrow L$ 满足

$$\lambda_j \circ a = \lambda_j \circ b \quad (\forall j \in J),$$

则 $a = b$ 。

证明. 1. 定义态射族 $\phi_j = \lambda_j \circ a : T \rightarrow X_j$ 。对图中任意态射 $f : i \rightarrow j$ ，由 $\{\lambda_j\}$ 是锥，有 $F(f) \circ \lambda_i = \lambda_j$ 。于是

$$F(f) \circ \phi_i = F(f) \circ (\lambda_i \circ a) = (F(f) \circ \lambda_i) \circ a = \lambda_j \circ a = \phi_j,$$

故 $\{T, \{\phi_j\}\}$ 构成图 F 的一个锥。(相当于把锥的顶点往上移动了一下，或者说往回拉了一下)

2. 由极限的泛性质，存在唯一的态射 $k : T \rightarrow L$ 使得

$$\phi_j = \lambda_j \circ k \quad (\forall j \in J).$$

3. 注意到 a 满足 $\lambda_j \circ a = \phi_j$ ，同时由题设， b 也满足 $\lambda_j \circ b = \phi_j$ 。因此， $a = k = b$ 。

□

下面我们来证明命题 3.3.8。

命题 10.16. 对任意范畴 $\mathcal{C}$ 与对象 $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ，遗忘函子 $\Pi : c/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 严格创建：

- (i) $\mathcal{C}$ 中存在的所有极限；
- (ii) $\mathcal{C}$ 中存在的所有连通余极限。

这里的遗忘函子定义为： $\Pi : c/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ，其中 $\Pi(Kj, \kappa_j) = Kj$ ， $\Pi(Kf) = Kf$ 。

证明分多个步骤，我们首先证明：在切片范畴上定义一个图：

$$D = (K, \kappa) : \mathcal{J} \rightarrow c/\mathcal{C}$$

等价于定义一个函子 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ，以及一个以 c 为顶点的锥 $\kappa : c \Rightarrow K$ 。

证明. 我们将图 $D : \mathcal{J} \rightarrow c/\mathcal{C}$ 按照定义翻译一下即可：

- 首先看函子在对象上的作用：根据切片范畴的对象定义， $D(j)$ 一定是一个以 c 为源的态射，因此记

$$D(j) = (Kj, \kappa_j), \quad \text{其中 } \kappa_j : c \rightarrow Kj \in \mathcal{C}.$$

也就是说， Kj 是 $\mathcal{C}$ 中的对象（切片对象的靶）， κ_j 是 $\mathcal{C}$ 中从 c 到 Kj 的态射（切片对象本身）。这相当于给出了 $\mathcal{C}$ 中图表 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 在对象上的作用（即 j 映射到 Kj ），以及锥 $\kappa : c \Rightarrow K$ 的分量 κ_j 。

- 现在看态射上的作用：根据切片范畴的态射定义， $D(f) : D(j) \rightarrow D(j')$ 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射，因此就是 $\mathcal{C}$ 中一个态射 $h : Kj \rightarrow Kj'$ ，且必须满足交换条件：

$$\kappa_{j'} = h \circ \kappa_j.$$

将这个 h 记为 Kf ，即 $Kf : Kj \rightarrow Kj' \in \mathcal{C}$ ，于是交换条件变为

$$\kappa_{j'} = Kf \circ \kappa_j. \quad (10.3)$$

这一步得到了 $\mathcal{C}$ 中图表 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 的态射部分（即把 f 映射为 Kf ），且式 (3) 正是锥 $\kappa : c \Rightarrow K$ 的交换性条件：对任意 $f : j \rightarrow j' \in \mathcal{J}$ ， $Kf \circ \kappa_j = \kappa_{j'}$ ，即所有从 c 出发的态射与图表 K 交换。

□

由定义可知，我们需要证明如下结论：若图表 $K = \Pi \circ (K, \kappa) : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在极限锥，则该极限锥可唯一提升为 $c/\mathcal{C}$ 中以 (K, κ) 为指标的锥（就是说这个锥是图表 $(K, \kappa) : \mathcal{J} \rightarrow c/\mathcal{C}$ 上面的锥），且该锥是 $c/\mathcal{C}$ 中的极限锥。这里的结构是遗忘函子下的图表

$$\mathcal{J} \xrightarrow{(K, \kappa)} c/\mathcal{C} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{C}.$$

设 $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的极限锥为 $\lambda : \ell \Rightarrow K$ ，其分量为 $\{\lambda_j : \ell \rightarrow Kj \mid j \in \text{Ob}(\mathcal{J})\}$ 。由极限的泛性质，对锥 $\kappa : c \Rightarrow K$ ，存在唯一的态射 $t : c \rightarrow \ell$ ，使得对所有 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ，有

$$\lambda_j \circ t = \kappa_j.$$

我们断言： (ℓ, t) 是 $c/\mathcal{C}$ 中以 (K, κ) 为指标的图表的极限锥（就是说这个极限锥是图表 $(K, \kappa) : \mathcal{J} \rightarrow c/\mathcal{C}$ 上面的极限锥）的顶点，且该锥的分量 (leg) 为

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_j : (\ell, t) \rightarrow (Kj, \kappa_j)$$

证明. 首先验证 $\hat{\lambda}_j$ 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射且满足交换性：而根据切片范畴的态射定义，需满足交换条件

$$\kappa_j = \lambda_j \circ t$$

而这正是极限泛性质给出的等式，因此 $\hat{\lambda}_j$ 是合法态射且显然交换。

接下来验证该锥是 $c/\mathcal{C}$ 中的极限锥（我们只证明泛性质）：对任意 $c/\mathcal{C}$ 中以 (K, κ) 为指标的锥（即这个图上面的锥），顶点为 (x, s) ，分量为 $h_j : (x, s) \rightarrow (Kj, \kappa_j)$ ，则由切片态射的定义， h_j 满足

$$\kappa_j = h_j \circ s$$

此时 $\{h_j : x \rightarrow Kj\}$ 构成 $\mathcal{C}$ 中以 K 为指标的锥，顶点为 x 。

由 $\mathcal{C}$ 中极限 $\lambda : \ell \Rightarrow K$ 的泛性质，存在唯一的态射 $u : x \rightarrow \ell$ ，使得对所有 j ，有

$$\lambda_j \circ u = h_j$$

我们需要验证 u 确实是 $c/\mathcal{C}$ 中从 (x, s) 到 (ℓ, t) 的态射，即满足交换条件

$$t = u \circ s$$

事实上，对任意 j ，有

$$\lambda_j \circ (u \circ s) = (\lambda_j \circ u) \circ s = h_j \circ s = \kappa_j = \lambda_j \circ t.$$

由 lemma3.1.2，我们知道若 $\lambda_j \circ a = \lambda_j \circ b$ 对所有 j 成立，则 $a = b$ 。

因此我们马上可得

$$u \circ s = t$$

因此 u 是 $c/\mathcal{C}$ 中的合法态射（因为满足交换性）。

唯一性是显然的（因为 $\mathcal{C}$ 中有这个的唯一性）。综上， (ℓ, t) 是 $c/\mathcal{C}$ 中 (K, κ) 的极限，遗忘函子 Π 将其映射为 $\mathcal{C}$ 中的极限 ℓ ，因此 Π 严格创建该极限。□

对于平行对 $a \rightrightarrows b$ ，上述提升可画为

$$\begin{array}{ccccc}
 c & \xrightarrow{\kappa_a} & K(a) & \xrightleftharpoons[K(g)]{K(f)} & K(b) \\
 & \searrow \scriptstyle t & \uparrow \scriptstyle \lambda_a & & \nearrow \scriptstyle \lambda_b \\
 & & \ell & &
 \end{array}$$

我们给一个简单情况下的示意图，帮助我们看懂上述思路。

现在我们来证明第二部分：

命题 10.17. 遗忘函子 $\Pi: c/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 严格创建 $\mathcal{C}$ 中所有连通余极限。即：对任意连通范畴 J ，任意图表 $K: J \rightarrow c/\mathcal{C}$ ，若 $\Pi \circ K = \bar{K}: J \rightarrow \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在余极限 $(\mu_j: \bar{K}_j \rightarrow p)_{j \in J}$ ，则

1. K 在 $c/\mathcal{C}$ 中存在唯一的余极限 $(\tilde{\mu}_j: K_j \rightarrow (p, \tilde{f}))_{j \in J}$ ；
2. Π 将该余极限映为 $\mathcal{C}$ 中的原余极限 $(\mu_j)_{j \in J}$ 。

证明. 步骤 1: 明确图表结构

设 $K: J \rightarrow c/\mathcal{C}$ 是 $c/\mathcal{C}$ 中的图表，其中 J 连通。那么 K 这个图表就是下面这样的函子：

(1) 对每个 $j \in J$ ，

$$K_j = (\bar{K}_j, \kappa_j: c \rightarrow \bar{K}_j),$$

即切片范畴对象（注意， $\Pi \circ K = \bar{K}$ ，其中的 Π 是遗忘函子，所以 K 和 $\bar{K}$ 在对象上的作用是一样的，所以可以直接记为 map 到 $\bar{K}_j$ ）；

(2) 对 J 中任意态射 $\alpha: j \rightarrow j'$ ，

$$K\alpha: (\bar{K}_j, \kappa_j) \rightarrow (\bar{K}_{j'}, \kappa_{j'})$$

是 $\mathcal{C}$ 中满足

$$\kappa_{j'} = K\alpha \circ \kappa_j$$

的态射 $K\alpha: \bar{K}_j \rightarrow \bar{K}_{j'}$ （还是因为遗忘函子的原因，所以和 $\bar{K}$ 在本质上是一样的）。这个交换性是切片范畴的定义要求的（要求两个对象之间的态射，要和对象带的那两个态射交换），即下面这个图：

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\kappa_j} & \bar{K}_j \\
 & \searrow \scriptstyle \kappa_{j'} & \downarrow \scriptstyle K\alpha \\
 & & \bar{K}_{j'}
 \end{array}$$

设 $\bar{K}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的余极限为 $(\mu_j: \bar{K}_j \rightarrow p)_{j \in J}$ ，即对任意 $\alpha: j \rightarrow j'$ ，有

$$\mu_{j'} \circ K\alpha = \mu_j.$$

步骤 2: 构造切片范畴中的余极限锥的顶点任取 $j_0 \in J$ ，定义

$$\tilde{f} := \mu_{j_0} \circ \kappa_{j_0}: c \rightarrow \bar{K}_{j_0} \rightarrow p.$$

良定义验证（确保和 J 中元素选取无关，这就用到了连通性）：对任意 $j_1 \in J$ ，由 J 连通，存在态射链

$$j_0 \xrightarrow{\alpha_1} j'_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} j_1.$$

由切片范畴态射的交换性 $\kappa_{j_{k+1}} = K\alpha_k \circ \kappa_{j_k}$ 与余极限交换性 $\mu_{j_{k+1}} \circ K\alpha_k = \mu_{j_k}$ ，递推可得

$$\mu_{j_1} \circ \kappa_{j_1} = \mu_{j_0} \circ \kappa_{j_0} = \tilde{f}.$$

故 $\tilde{f}$ 与 j_0 的选取无关。

因此，我们选取 p 和 $\tilde{f}: c \rightarrow p$ ，即 $(p, \tilde{f})$ 作为余极限锥的顶点。

步骤 3：构造切片范畴中的余极限锥的 leg

上面我们已经构成好余极限锥的顶点了，还需要 leg。对每个 $j \in J$ ，定义 $c/\mathcal{C}$ 中的态射

$$\tilde{\mu}_j: K_j = (\bar{K}_j, \kappa_j) \rightarrow (p, \tilde{f})$$

为 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\mu_j: \bar{K}_j \rightarrow p$ 。

1. 合法性： $\tilde{f} = \mu_j \circ \kappa_j$ ，由 $\tilde{f}$ 的定义直接成立；
2. 锥交换性：对任意 $\alpha: j \rightarrow j'$ ，

$$\tilde{\mu}_{j'} \circ K\alpha = \mu_{j'} \circ K\alpha = \mu_j = \tilde{\mu}_j,$$

故 $(\tilde{\mu}_j)_{j \in J}$ 是 K 在 $c/\mathcal{C}$ 中的余锥。

步骤 4：验证余极限的泛性质

下面验证上述锥确实是一个余极限锥。设 $(v_j: K_j \rightarrow (q, g: c \rightarrow q))_{j \in J}$ 是 K 在 $c/\mathcal{C}$ 中的任意余锥。

4.1 存在性

由 v_j 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射，得

$$g = v_j \circ \kappa_j, \quad \forall j \in J.$$

且 $(v_j: \bar{K}_j \rightarrow q)_{j \in J}$ 是 $\bar{K}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的锥。

由 $\mathcal{C}$ 中余极限的泛性质，存在唯一态射 $h: p \rightarrow q$ 使得

$$h \circ \mu_j = v_j, \quad \forall j \in J.$$

验证 h 是 $c/\mathcal{C}$ 中的态射：

$$g = v_j \circ \kappa_j = (h \circ \mu_j) \circ \kappa_j = h \circ (\mu_j \circ \kappa_j) = h \circ \tilde{f}.$$

4.2 唯一性

若存在 $h': (p, \tilde{f}) \rightarrow (q, g)$ 满足

$$h' \circ \tilde{\mu}_j = v_j \implies h' \circ \mu_j = v_j,$$

由 $\mathcal{C}$ 中余极限泛性质的唯一性，得 $h' = h$ 。

步骤 5：遗忘函子保持余极限由遗忘函子的定义， Π 将 $c/\mathcal{C}$ 中的余极限锥 $(\tilde{\mu}_j)$ 映为 $\mathcal{C}$ 中的原余极限锥 (μ_j) ， y 因此 Π 保持该连通余极限。□

10.3 函子范畴里的结果

下面是几个必备的定义。首先，我们定义两个函子范畴：

定义 10.18 (C^A). 设 A 为小范畴, C^A 为**函子范畴**:

- ▶ 对象: 所有函子 $F: A \rightarrow C$;
- ▶ 态射: 函子之间的全体自然变换。

定义 10.19 ($C^{\text{ob}A}$). $\text{ob}A$ 即把 A 视为离散范畴 (仅含对象与恒等态射, 无任何非恒等态射), 因此 $C^{\text{ob}A}$ 为该离散范畴到 C 的函子范畴。

事实上, 我们可以证明下面这样一个结果:

$$C^{\text{ob}A} \cong \prod_{a \in \text{ob}A} C$$

其中, $\prod_{a \in \text{ob}A} C$ 是乘积范畴:

- ▶ 对象: 指标族 $\{X_a\}_{a \in \text{ob}A}$, 满足 $\forall a \in \text{ob}A, X_a \in \text{ob}C$;
- ▶ 态射: 指标族 $\{f_a: X_a \rightarrow Y_a\}_{a \in \text{ob}A}$, 满足 $\forall a \in \text{ob}A, f_a \in \text{Hom}_C(X_a, Y_a)$;

注 10.20. 注意, 这个是范畴的同构 (不只是等价了)。

证明是简单的。因为我们有如下函子: $H: C^{\text{ob}A} \rightarrow \prod_{a \in \text{ob}A} C$

- ▶ 对象作用: $H(F) = \{F(a)\}_{a \in \text{ob}A}$;
- ▶ 态射作用: $H(\alpha) = \{\alpha_a\}_{a \in \text{ob}A}$ 。

这个函子显然是全忠实, 且在对象集上双射的函子, 结论得证。

我们还需要下面几个概念:

定义 10.21 (遗忘函子 U). 函子 $U: C^A \rightarrow C^{\text{ob}A}$ 定义为:

- ▶ 对象: 对函子 $F \in \text{ob}C^A$, $U(F)$ 为如下离散函子: 取值 $U(F)(a) = F(a), \forall a \in \text{ob}A$, 对态射作用只有把恒等态射映射为恒等态射;
- ▶ 态射: 对自然变换 $\alpha: F \Rightarrow G$, $U(\alpha)$ 为分量族 $\{\alpha_a\}_{a \in \text{ob}A}$ 。

定义 10.22. 设 J 为小范畴, 称范畴 C 拥有所有 J -型极限: 对任意函子 $G: J \rightarrow C$ (即任意 J -型图), G 在 C 中存在极限。

定义 10.23 (U 严格创造 J -型极限). 设 J 为小范畴。函子 U 严格创造 J -型极限, 是指: 对任意 J -型图 $F: J \rightarrow C^A$, 只要 $U(F)$ 在 $C^{\text{ob}A}$ 中存在极限, 就唯一存在 F 在 C^A 中的极限锥, 使得该极限锥经函子 U 作用后, 恰好是 $U(F)$ 在 $C^{\text{ob}A}$ 中的极限锥。

下面就是 3.3 节的最后一个命题:

命题 10.24. 若范畴 C 中存在所有 J -型极限, 则遗忘函子

$$U: C^A \rightarrow C^{\text{ob}A}$$

严格创造 C^A 中所有 J -型极限。

对偶地, 若范畴 C 中存在所有 J -型余极限, 则 U 严格创造 C^A 中所有 J -型余极限。

证明.

□

11 函子范畴中的极限

11.1 预备知识

我们依赖下面这几个结论：

定理 11.1 (Theorem 3.2.13). 在集合范畴 $\mathbf{Set}$ 中，任意小图表 $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ 的极限 $\lim_{\mathcal{J}} F$ 都可以表示为两个积 (Product) 之间的一对映射的等化子 (Equalizer)。

具体来说，存在等化子图表：

$$\lim_{\mathcal{J}} F \hookrightarrow \prod_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} F(j) \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} \prod_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})} F(\text{cod}(f))$$

其中两个映射 c, d 定义为：

- ▶ $c: (\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mapsto (\lambda_{\text{cod}(f)})_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})}$ ；
- ▶ $d: (\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mapsto (F(f)(\lambda_{\text{dom}(f)}))_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})}$ 。

由集合范畴里等化子的构造可知， $\lim_{\mathcal{J}} F$ 是 $\prod_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} F(j)$ 中满足

$$c((\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}) = d((\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})})$$

的所有多元组 $(\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$ 的集合。

11.2 函子范畴里的极限

设范畴 $\mathcal{C}$ 为完备范畴 (拥有所有小极限)，范畴 $\mathcal{K}$ 与范畴 $\mathcal{J}$ 为小范畴。函子范畴记为 $[\mathcal{K}, \mathcal{C}]$ ，其中对象为函子 $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$ ，态射为函子之间的自然变换。

考虑图表 $D: \mathcal{J} \rightarrow [\mathcal{K}, \mathcal{C}]$ 。它把任意对象 $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ 映射为函子 $D_i: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$ ，把范畴 $\mathcal{J}$ 中态射 $\alpha: i \rightarrow j$ ，映射为自然变换 $D(\alpha): D_i \Rightarrow D_j$ 。我们准备在函子范畴 $[\mathcal{K}, \mathcal{C}]$ 中构造图表 D 的极限。

首先，考虑这个极限锥的顶点，记为 $L: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$ ，是一个函子。对任意对象 $k \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ ，我们构造下面这样一个图 $D_{\bullet}(k): \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ：

- ▶ 对每个对象 $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ，映射为对象 $D_i(k)$ ；
- ▶ 对每个态射 $\alpha: i \rightarrow j$ in $\mathcal{J}$ ，映射为态射 $D(\alpha): D_i(k) \rightarrow D_j(k)$ in $\mathcal{C}$ 。后者为自然变换 $D(\alpha): D_i \Rightarrow D_j$ 在对象 k 处的分量。

因为范畴 $\mathcal{C}$ 是完备的，所以上述图存在极限锥： $(\lim_{i \in \mathcal{J}} D_i(k), \{\pi_{i,k}: \lim_{i \in \mathcal{J}} D_i(k) \rightarrow D_i(k)\}_{i \in \mathcal{J}})$ ，令：

$$L(k) := \lim_{i \in \mathcal{J}} D_i(k).$$

这就定义好了函子 L 在对象上的作用。

下面考虑函子在态射上的作用。任取范畴 $\mathcal{K}$ 中态射 $f: k \rightarrow k'$ ， $L(f)$ 是 $\lim_{i \in \mathcal{J}} D_i(k)$ 到 $\lim_{i \in \mathcal{J}} D_i(k')$ 的态射。也就是说，我们只需要找到这两个图对应的极限锥的顶点之间的一个态射即可。我们看下面这个交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
& L(k) = \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i(k) & & & \\
& \swarrow \pi_{i,k} & \downarrow L(f) & \searrow \pi_{j,k} & \\
D_i(k) & \xrightarrow{D(\alpha)_k} & & \xrightarrow{D(\alpha)_k} & D_j(k) \\
\downarrow D_i(f) & & & & \downarrow D_j(f) \\
& L(k') = \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i(k') & & & \\
& \swarrow \pi_{i,k'} & \downarrow D(f) & \searrow \pi_{j,k'} & \\
D_i(k') & \xrightarrow{D(\alpha)_{k'}} & & \xrightarrow{D(\alpha)_{k'}} & D_j(k')
\end{array}$$

相当于把 $\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i(k)$ 这个锥，变成了 $\{D_i(k')\}_{i \in \mathcal{I}}$ 这个图的锥；所以马上由极限锥的泛性质，存在 $L(f)$ 这个态射，使得图交换。

注 11.2. 下面这个矩形交换，是因为 $\{D(\alpha)_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ 是自然变换。

这样我们就定义好了一个函子 L 。这个是函子是显然的（看上面这个交换图即可）。

接着，我们考虑这个极限锥的侧棱，即对任意 $i \in \mathcal{I}$ ，定义自然变换： $L \Rightarrow D_i$ 。我们直接取态射族 $\{\pi_{i,k}: L(k) \rightarrow D_i(k)\}_{k \in \text{Ob}(\mathcal{K})}$ 。见上面那个交换图，我们有如下式子：

$$\pi_{i,k'} \circ L(f) = D_i(f) \circ \pi_{i,k}.$$

这恰好满足自然变换的要求，因此：

$$\pi_i: L \Rightarrow D_i$$

就是极限锥的侧棱（显然满足极限锥所需的那个交换性，还是见上面那个交换图靠上面的那个三角形）。由此我们得到函子范畴 $[\mathcal{K}, \mathcal{C}]$ 中的锥：

$$(L, \{\pi_i: L \Rightarrow D_i\}_{i \in \mathcal{I}}).$$

现在只需要证明泛性质即可。

定理 11.3. 上述锥 $(L, \{\pi_i\})$ 是图表 $D: \mathcal{I} \rightarrow [\mathcal{K}, \mathcal{C}]$ 在函子范畴 $[\mathcal{K}, \mathcal{C}]$ 中的极限锥。

证明. 任取 $[\mathcal{K}, \mathcal{C}]$ 中另一锥

$$(M, \{\alpha_i: M \Rightarrow D_i\}_{i \in \mathcal{I}}).$$

逐点考察：对任意 $k \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ ， $(M(k), \{\alpha_{i,k}\}_{i \in \mathcal{I}})$ 是 $\mathcal{C}$ 中图表 $\{D_i(k)\}$ 的锥。

由 $L(k) = \lim_i D_i(k)$ 的泛性质，存在唯一态射：

$$\sigma_k: M(k) \rightarrow L(k),$$

使得 $\pi_{i,k} \circ \sigma_k = \alpha_{i,k}$ 对全部 $i \in \mathcal{I}$ 成立。

可验证 $\{\sigma_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ 拼接为自然变换 $\sigma: M \Rightarrow L$ ，且满足：

$$\pi_i \circ \sigma = \alpha_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

逐点唯一性蕴含自然变换 σ 整体的唯一性，故该锥满足极限的泛性质。 $\square$

11.3 极限、锥与同态函子

给定局部小范畴 $\mathbb{C}$ 、小图表 $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$ 和对象 $X \in \mathbb{C}$ ，定义复合函子：

$$G = \mathbb{C}(X, F(-)) : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$$

其作用如下：

- ▶ 对对象 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ： $G(j) = \mathbb{C}(X, F(j))$ ；
- ▶ 对态射 $f : j \rightarrow k$ ： $G(f) : \mathbb{C}(X, F(j)) \rightarrow \mathbb{C}(X, F(k))$ 是由后复合 (Post-composition) 诱导的集合间的函数。对于任何元素 $g \in \mathbb{C}(X, F(j))$ (即 $\mathbb{C}$ 中的态射 $g : X \rightarrow F(j)$)，其作用定义为：

$$G(f)(g) = F(f) \circ g$$

该过程由下述 $\mathbb{C}$ 中的交换图表示：

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ g \swarrow & & \searrow F(f) \circ g \\ F(j) & \xrightarrow{F(f)} & F(k) \end{array}$$

根据定理 3.2.13，极限 $\lim_{\mathcal{J}} G = \lim_{\mathcal{J}} \mathbb{C}(X, F(-))$ 存在，且可以表示为等化子：

$$\lim_{\mathcal{J}} \mathbb{C}(X, F(-)) \hookrightarrow \prod_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbb{C}(X, F(j)) \xrightleftharpoons[d]{c} \prod_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})} \mathbb{C}(X, F(\text{cod}(f)))$$

命题 11.4. 在集合意义上，我们有如下同构：

$$\lim_{\mathcal{J}} \mathbb{C}(X, F(-)) \cong \text{Cone}(X, F) \quad (11.1)$$

其中 $\text{Cone}(X, F)$ 是全体以 X 为顶点的 F 上的锥构成的集合。

证明. 记 $\prod_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbb{C}(X, F(j))$ 的元素为多元组 $(\lambda_j : X \rightarrow F(j))_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$ 。由定理 1.1 可知， $\lim_{\mathcal{J}} \mathbb{C}(X, F(-))$ 是满足 $c((\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}) = d((\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})})$ 的所有多元组 $(\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$ 构成的集合。

又由 c 和 d 的定义可知：

- ▶ $c((\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}) = (\lambda_{\text{cod}(f)})_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})}$
- ▶ $d((\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}) = (F(f) \circ \lambda_{\text{dom}(f)})_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})}$

因此，我们有：

$$(\lambda_{\text{cod}(f)})_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})} = (F(f) \circ \lambda_{\text{dom}(f)})_{f \in \text{Hom}(\mathcal{J})}$$

这等价于对于所有的态射 $f : j \rightarrow k$ ，都有：

$$\lambda_k = F(f) \circ \lambda_j$$

而这样一族满足上述交换图条件 (对于所有 $f : j \rightarrow k$ ，都有 $\lambda_k = F(f) \circ \lambda_j$) 的态射 $(\lambda_j : X \rightarrow F(j))_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$ ，正是一个以 X 为顶点的 F 上的锥 (Cone)。由此可知，该等化子所定义的集合恰好是：

$$\{(\lambda_j)_{j \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mid \forall f : j \rightarrow k, \lambda_k = F(f) \circ \lambda_j\} = \text{Cone}(X, F)$$

□

在 3.1 节里，我们知道极限的定义是锥函子的可表对象，即：图表 F 的极限 $\lim_{\mathcal{J}} F$ 满足对任意 $X \in \mathbb{C}$ 有同构：

$$\mathbb{C}(X, \lim_{\mathcal{J}} F) \cong \text{Cone}(X, F) \quad (11.2)$$

现在，我们来证明这两个函子之间的这个同构族（ X 取遍之后）是一个自然同构。

证明. □

因此我们立刻得到以下定理：

定理 11.5. 设范畴 $\mathbb{C}$ 中图表 $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$ 的极限存在，则对于任意对象 $X \in \mathbb{C}$ ，存在如下自然同构：

$$\mathbb{C}(X, \lim_{\mathcal{J}} F) \cong \lim_{\mathcal{J}} \mathbb{C}(X, F(-))$$

注意，上面我们只是证明了函子作用在极限锥后，新锥的顶点和新图极限锥的顶点同构，但是是不是保持极限还不确定。事实上，我们可以证明下面这样的结果：

定理 11.6. $\mathbb{C}(X, -)$ preserve any limits that exist in a locally small category $\mathbb{C}$, sending them to limits in Set .

证明的思路很简单：我们只需要去证明函子作用后的锥，和新图的极限锥同构即可。我们已经证明了锥的顶点是同构的，现在只需要去证明这个同构和两个锥的 leg “相容即可”。

证明. 设 (L, λ) 是图表 $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的极限锥，其中 L 为顶点， $\lambda_j : L \rightarrow F(j)$ 为其侧棱。我们要证明 $\mathbb{C}(X, -)$ 保持该极限。

首先，考虑复合图表 $G = \mathbb{C}(X, F(-)) : \mathcal{J} \rightarrow \text{Set}$ 。根据定义 3.2.3，该图表在 Set 中的极限定义为以单点集 1 为顶点的锥的集合：

$$\lim_{\mathcal{J}} G := \text{Cone}(1, G)$$

其极限锥的侧棱定义为投影函数 $\pi_j : \text{Cone}(1, G) \rightarrow G(j)$ ，它将每一个锥 $\mu : 1 \Rightarrow G$ 映射到其第 j 条边 $\mu_j : 1 \rightarrow G(j)$ 。对于 $\mathcal{J}$ 中的任意态射 $f : j \rightarrow k$ ，根据锥的定义，下述三角形在 Set 中交换：

$$\begin{array}{ccc} & \text{Cone}(1, G) & \\ \pi_j \swarrow & & \searrow \pi_k \\ G(j) & \xrightarrow{G(f)} & G(k) \end{array}$$

另一方面，我们将函子 $\mathbb{C}(X, -)$ 作用于原极限锥 (L, λ) ，从而在 Set 中得到一个以 $\mathbb{C}(X, L)$ 为顶点的新锥（锥在函子作用下还是一个锥）。该锥的侧棱为一族函数 $\mathbb{C}(X, \lambda_j) : \mathbb{C}(X, L) \rightarrow \mathbb{C}(X, F(j))$ ，其作用定义为

$$g \mapsto \lambda_j \circ g$$

由锥的定义可知，对于任意态射 $f : j \rightarrow k$ ，下图是交换的：

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}(X, L) & \\ \mathbb{C}(X, \lambda_j) \swarrow & & \searrow \mathbb{C}(X, \lambda_k) \\ G(j) & \xrightarrow{G(f)} & G(k) \end{array}$$

根据定理 2.1，上述两个锥的顶点之间存在一个双射 $\Psi : \mathbb{C}(X, L) \xrightarrow{\cong} \text{Cone}(1, G)$ 。对于任何态射 $g : X \rightarrow L$ ， $\Psi(g)$ 唯一对应一个锥 $\mu^{(g)} \in \text{Cone}(1, G)$ ，该锥的第 j 个分量 $\mu_j^{(g)} : 1 \rightarrow \mathbb{C}(X, F(j))$ 所选取的集合元素正是 $\lambda_j \circ g$ 。

最后，为证明 $\mathbb{C}(X, -)$ 保持极限，只需证明双射 Ψ 与上述两个锥的侧棱结构相容。对于每一个 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ，考虑下述交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(X, L) & \xrightarrow[\cong]{\Psi} & \text{Cone}(1, G) \\ & \searrow \mathbb{C}(X, \lambda_j) \quad \swarrow \pi_j & \\ & G(j) & \end{array}$$

对于任意元素 $g \in \mathbb{C}(X, L)$ ：

1. 沿左下方路径作用，得到 $\mathbb{C}(X, \lambda_j)(g) = \lambda_j \circ g$ 。
2. 沿右上方路径作用， $\Psi(g)$ 得到锥 $\mu^{(g)}$ ；再应用侧棱投影 π_j ，根据定义 3.2.3 可得 $\pi_j(\mu^{(g)}) = \mu_j^{(g)}$ 。
3. 根据 Ψ 的构造， $\mu_j^{(g)}$ 对应的集合元素恰好是 $\lambda_j \circ g$ 。

由此可知 $\pi_j \circ \Psi = \mathbb{C}(X, \lambda_j)$ 对所有 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ 均成立。这证明了 Ψ 是锥范畴中的同构，因此 $(\mathbb{C}(X, L), \mathbb{C}(X, \lambda_j))$ 确实构成了图表 $\mathbb{C}(X, F(-))$ 在 Set 中的极限。□

注 11.7. 从伴随的角度看，这是自然的。因为 $\text{Hom}(X, -)$ 是右伴随函子，而右伴随函子总是保持极限的。这个结果在第四章里会予以证明。

11.4 米田函子与极限

接下来我们研究协变米田函子的核心性质。

定义 11.8 (米田函子). 设 $\mathbb{C}$ 为局部小范畴。covariant Yoneda embedding 是函子

$$y : \mathbb{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$$

定义如下：

- ▶ 对对象 $X \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ ，定义

$$y(X) = \mathbb{C}(-, X) : \mathbb{C}^{op} \rightarrow \text{Set},$$

即由 X 代表的反变可表函子；

- ▶ 对态射 $f : X \rightarrow Y$ in $\mathbb{C}$ ，定义自然变换

$$y(f) : \mathbb{C}(-, X) \Rightarrow \mathbb{C}(-, Y)$$

其分量为：对任意 $Z \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ ，

$$y(f)_Z : \mathbb{C}(Z, X) \rightarrow \mathbb{C}(Z, Y), \quad g \mapsto f \circ g.$$

定理 11.9. 设 $\mathbb{C}$ 为任意局部小范畴。共变米田嵌入

$$y : \mathbb{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$$

既保持又反映极限；等价地， $\mathbb{C}$ 中一个锥为极限锥，当且仅当它在 $\text{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ 中的像为极限锥。

证明. 证明分为两部分：反映极限与保持极限。

第一部分：反映极限。 由于全忠实函子反映所有极限。因此，要证明米田嵌入反映极限，只需要证明米田函子是全忠实的。而根据米田引理，对任意对象 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ，存在自然同构

$$\text{Hom}_{\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}}(y(X), y(Y)) \cong \mathcal{C}(X, Y).$$

而米田嵌入 y 在态射上的作用给出映射

$$y_{X,Y}: \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}}(y(X), y(Y)),$$

该映射正是米田引理中给出的同构，因此 $y_{X,Y}$ 是双射。故 y 是全忠实函子。

第二部分：保持极限。 设 $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 为小图表， (L, λ_j) 是 F 在 $\mathcal{C}$ 中的极限锥，其中 $L = \lim_{\mathcal{J}} F$ 。考虑诱导的图表 $y \circ F: \mathcal{J} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ 。

根据函子范畴的极限构造， $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ 中的极限是逐点计算的：

$$\left(\lim_{\mathcal{J}} y \circ F \right)(Z) \cong \lim_{\mathcal{J}} (y(F(j))(Z)) = \lim_{\mathcal{J}} \mathcal{C}(Z, F(j)), \quad \forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

由前一节结论，可表函子 $\mathcal{C}(Z, -)$ 保持极限。因此 $(\mathcal{C}(Z, L), \mathcal{C}(Z, \lambda_j))$ 是 $\mathcal{C}(Z, F(-))$ 的极限锥，从而由极限的泛性质，存在唯一同构：

$$\Phi_Z: \mathcal{C}(Z, L) \xrightarrow{\cong} \lim_{\mathcal{J}} \mathcal{C}(Z, F(j))$$

使得对所有 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ，都有 $\pi_{j,Z} \circ \Phi_Z = \mathcal{C}(Z, \lambda_j)$ ，其中 $\pi_{j,Z}: \lim_{\mathcal{J}} \mathcal{C}(Z, F(j)) \rightarrow \mathcal{C}(Z, F(j))$ 是逐点极限的投影。

接下来验证 $\{\Phi_Z\}_{Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ 构成自然变换。任取态射 $f: Z' \rightarrow Z$ in $\mathcal{C}$ ，我们需要证明以下方块（左侧）对于 f 是自然交换的：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}(Z, L) & \xrightarrow[\cong]{\Phi_Z} & \lim_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{C}(Z, F(j)) & & \\ \downarrow f^* = \mathcal{C}(f, L) & & \downarrow \lim \mathcal{C}(f, F(j)) & \searrow \pi_{j,Z} & \\ \mathcal{C}(Z', L) & \xrightarrow[\cong]{\Phi_{Z'}} & \lim_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{C}(Z', F(j)) & \xrightarrow{\pi_{j,Z'}} & \mathcal{C}(Z', F(j)) \end{array}$$

为了证明左侧方框交换，我们利用极限的泛性质即可：映射到极限 $\lim \mathcal{C}(Z', F(j))$ 的两个态射相等，当且仅当它们与每一个投影 $\pi_{j,Z'}$ 复合后都相等（相当于构成了两个锥，故 map 得唯一）。

对于任意 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ ，观察图表的复合路径：

1. **路径一（先向右再向下）：**由极限对态射的函子性（右侧三角形/梯形部分）以及 Φ_Z 的定义：

$$\pi_{j,Z'} \circ \left(\lim_{\mathcal{J}} \mathcal{C}(f, F(j)) \right) \circ \Phi_Z = \mathcal{C}(f, F(j)) \circ \pi_{j,Z} \circ \Phi_Z = \mathcal{C}(f, F(j)) \circ \mathcal{C}(Z, \lambda_j)$$

该映射将 $g \in \mathcal{C}(Z, L)$ 送至 $\lambda_j \circ g \circ f$ 。

2. 路径二（先向下再向右）：由 $\Phi_{Z'}$ 的定义：

$$\pi_{j,Z'} \circ \Phi_{Z'} \circ \mathcal{C}(f, L) = \mathcal{C}(Z', \lambda_j) \circ \mathcal{C}(f, L)$$

该映射同样将 g 送至 $\lambda_j \circ (g \circ f)$ 。

由于上述两路径在每个分量 j 上都相等，故： Φ 确实是一个自然同构 $y(L) \cong \lim_{\mathcal{J}} y(F(j))$ 。

最后验证此自然变换与锥侧棱的相容性，即：

$$\pi_j \circ \Phi = y(\lambda_j), \quad \forall j \in Ob(\mathcal{J}),$$

其中 $\pi_j: \lim_{\mathcal{J}} y(F(j)) \Rightarrow y(F(j))$ 是函子范畴中极限锥的投影（见第 2 节里的定义），其分量为 $(\pi_j)_Z = \pi_{j,Z}$ 。我们只需验证分量层面的等式：对任意 $Z \in Ob(\mathcal{C})$ ，

$$(\pi_j)_Z \circ \Phi_Z = y(\lambda_j)_Z.$$

而 $(\pi_j)_Z = \pi_{j,Z}$ ， $y(\lambda_j)_Z = \mathcal{C}(Z, \lambda_j)$ ，由 Φ_Z 的定义， $\pi_{j,Z} \circ \Phi_Z = \mathcal{C}(Z, \lambda_j)$ ，因此分量层面成立。故自然变换层面的等式成立。

这说明 y 作用后的锥与 $y \circ F$ 的极限锥同构。因此，像锥 $(y(L), y(\lambda_j))$ 是 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ 中的极限锥，即米田嵌入保持极限。 $\square$

11.5 一些例子

例 11.10. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴， I 为指标集， $A \in Ob(\mathcal{C})$ 。

定义 11.11. A 的 I 次常值积是一对

$$(A^I, \{\pi_i: A^I \rightarrow A\}_{i \in I})$$

满足：对任意 $X \in Ob(\mathcal{C})$ ，任意一族态射 $\{f_i: X \rightarrow A\}_{i \in I}$ ，存在唯一态射 $f: X \rightarrow A^I$ ，使得

$$\forall i \in I, \quad \pi_i \circ f = f_i.$$

这就是我们熟知的 *product* 的定义。事实上，我们可以给出如下等价定义：

定理 11.12. 上述常值积的定义成立，当且仅当对任意 $X \in Ob(\mathcal{C})$ ，存在同构（集合范畴里的）：

$$\mathbb{C}(X, A^I) \cong \mathbb{C}(X, A)^I$$

其中 $\mathbb{C}(X, A)^I = \prod_{i \in I} \mathbb{C}(X, A)$ （这是指集合范畴里的 *product*），其元素为指标态射族 $\{f_i: X \rightarrow A\}_{i \in I}$ 。

证明. 我们分两个方向进行证明。

由积泛性质推出同构 构造映射 Φ ：

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{C}(X, A^I) &\rightarrow \mathbb{C}(X, A)^I \\ f &\mapsto \{\pi_i \circ f\}_{i \in I} \end{aligned}$$

1. 满射：任给一族 $\{f_i\} \in \mathbb{C}(X, A)^I$ ，由积的泛性质，存在 $f: X \rightarrow A^I$ 使得 $\pi_i \circ f = f_i$ ，即 $\Phi(f) = \{f_i\}$ ，故 Φ 是满射。
2. 单射：若 $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$ ，则 $\forall i \in I, \pi_i \circ f_1 = \pi_i \circ f_2$ 。由积泛性质中的唯一性，得 $f_1 = f_2$ ，故 Φ 是单射。

因此 Φ 是双射，即 $\mathbb{C}(X, A^I) \cong \mathbb{C}(X, A)^I$ 。自然性由投影与复合的函子性直接保证。

由同构推出积泛性质 已知对任意对象 X ，有双射

$$\Phi_X : \mathbb{C}(X, A^I) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(X, A)^I.$$

1. 取 $X = A^I$ ，代入恒等态射 $\text{id}_{A^I} \in \mathbb{C}(A^I, A^I)$ ，定义投影族：

$$\{\pi_i := \Phi_{A^I}(\text{id}_{A^I})_i\}_{i \in I}, \quad \pi_i : A^I \rightarrow A.$$

2. 任给对象 X 与态射族 $\{f_i : X \rightarrow A\}_{i \in I}$ ，由 Φ_X 是双射，存在唯一的 $f : X \rightarrow A^I$ 使得

$$\Phi_X(f) = \{f_i\}.$$

按 Φ 的定义即得：

$$\forall i \in I, \quad \pi_i \circ f = f_i,$$

□

注 11.13. 这个好像是自然同构？得再看一下

11.6 定理 3.2.13 的推广

我们首先需要一些对偶的结果。事实上，通过与第 3 节完全对偶的论证（即考察以 X 为顶点的 F 上的余锥集合 $\text{cocone}(X, F)$ ），我们得到如下关于余极限的定理：

定理 11.14 (Theorem 3.4.7). 设范畴 $\mathbb{C}$ 中图表 $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$ 的上极限存在，则对于任意对象 $X \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ ，存在如下集合间的自然同构：

$$\mathbb{C}(\text{colim}_{j \in \mathcal{J}} F(j), X) \cong \lim_{j \in \mathcal{J}^{op}} \mathbb{C}(F(j), X)$$

该同构说明反变代表函子 $\mathbb{C}(-, X) : \mathbb{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ 将 $\mathbb{C}$ 中的上极限映射为 Set 中的极限。

类似的，还有下面这个结果：

定理 11.15 (定理 3.4.11). 设 $\mathbb{C}$ 为任意局部小范畴。

- (i) 反变可表函子 $\mathbb{C}(-, X)$ 将 $\mathbb{C}$ 中的余极限送为 Set 中的极限；
- (ii) 反变米田嵌入 $y : \mathbb{C}^{op} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{C}}$ 既保持又反映 $\mathbb{C}^{op}$ 中的极限。等价地， $\mathbb{C}$ 中一个余锥为余极限锥，当且仅当其像在 $\text{Set}^{\mathbb{C}}$ 中为极限锥。

利用上面两个结果，我们可以得到 Theorem 3.2.13 的对偶版本。

定理 11.16 (定理 3.4.12). 任意小图表 $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{C}$ 的余极限都可表示为两个余积之间一对态射的余等化子。

态射

$$d, c : \coprod_{f \in \text{Hom } \mathcal{J}} F(\text{dom } f) \longrightarrow \coprod_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}} F(j)$$

由余积的泛性质和下列交换图确定：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & F(\text{dom } f) & \\
 & & \swarrow \iota_{\text{dom } f} & \downarrow \iota_f & \\
 C & \xleftarrow{\text{coeq}} & \coprod_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}} Fj & \xrightleftharpoons[c]{d} & \coprod_{f \in \text{Hom } \mathcal{J}} F(\text{dom } f) \\
 & & \uparrow \iota_{\text{cod } f} & & \uparrow \iota_f \\
 & & F(\text{cod } f) & \xleftarrow{Ff} & F(\text{dom } f)
 \end{array} \quad (11.3)$$

具体地，对每个 $f \in \text{Hom } \mathcal{J}$ ， d, c 的分量为：

- d 在 f 处的分量是定义域的余积嵌入：

$$d \circ \iota_f = \iota_{\text{dom } f}$$

- c 在 f 处的分量是 Ff 与上域余积嵌入的复合：

$$c \circ \iota_f = \iota_{\text{cod } f} \circ Ff$$

注意， c 和 d 都是利用最右边这个余积的泛性质保证的。

固定对象 $X \in \mathbb{C}$ ，利用反变代表函子 $\mathbb{C}(-, X): \mathbb{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 作用于上述图表。根据函子保持交换性的定义，我们得到 $\mathbf{Set}$ 中的图表：

$$\mathbb{C}(C, X) \xrightarrow{q^*} \mathbb{C}\left(\coprod_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}} Fj, X\right) \xrightleftharpoons[\mathbb{C}(d, X)]{\mathbb{C}(c, X)} \mathbb{C}\left(\coprod_{f \in \text{Hom } \mathcal{J}} F(\text{dom } f), X\right)$$

根据 **Theorem 3.4.11(i)**，反变代表函子将 $\mathbb{C}$ 中的余极限映射为 $\mathbf{Set}$ 中的极限。因此，对象 $\mathbb{C}(C, X)$ 恰好是上述图表在 $\mathbf{Set}$ 中的等化子。

进一步利用自然同构 $\Phi: \mathbb{C}(\coprod A_i, X) \cong \prod \mathbb{C}(A_i, X)$ ，我们将上述图表转化为由集合乘积构成的等价形式（图 3.4.14）：

$$\mathbb{C}(C, X) \xrightarrow{q^*} \prod_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}^{\text{op}}} \mathbb{C}(Fj, X) \xrightleftharpoons[d]{c} \prod_{f \in \text{Hom } \mathcal{J}^{\text{op}}} \mathbb{C}(F(\text{cod } f), X)$$

为了识别此图表的等化子，考虑复合函子 $G = \mathbb{C}(F-, X): \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 。对于每个对象 $j \in \text{Ob } \mathcal{J}^{\text{op}}$ ，有 $G(j) = \mathbb{C}(Fj, X)$ ；对于每个态射 $f: k \rightarrow j \in \text{Hom } \mathcal{J}^{\text{op}}$ （对应 $\mathcal{J}$ 中的 $f: j \rightarrow k$ ），有 $G(f) = \mathbb{C}(Ff, X): \mathbb{C}(Fk, X) \rightarrow \mathbb{C}(Fj, X)$ 。根据 **Theorem 3.2.13**，图表 G 的极限 $\lim_{\mathcal{J}^{\text{op}}} G$ 由如下等化子构造：

$$\begin{array}{ccc}
 \lim_{\mathcal{J}^{\text{op}}} G & \xrightarrow{\quad} & \prod_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}^{\text{op}}} G(j) \xrightleftharpoons[d]{c} \prod_{f: k \rightarrow j} G(\text{dom}_{\mathcal{J}^{\text{op}}} f) \\
 & & \downarrow \pi_j \quad \searrow \pi_k \quad \downarrow \pi_f \\
 & & G(j) \xleftarrow{G(f)} G(k)
 \end{array}$$

观察可知，上述标准极限构造图表中的分量映射与图 (3.4.14) 完全匹配。

由于 $\mathbb{C}(C, X)$ 与 $\lim_{j \in \mathcal{J}^{\text{op}}} \mathbb{C}(Fj, X)$ 均作为同一平行映射对的等化子，由极限的唯一性得：

$$\mathbb{C}(C, X) \cong \lim_{j \in \mathcal{J}^{\text{op}}} \mathbb{C}(Fj, X)$$

此同构对所有 $X \in \mathbb{C}$ 是自然的。

因此，我们得到：

$$C \cong \text{colim}_{j \in \mathcal{J}} Fj$$

11.7 两个引理

这一章的最后是两个简单的引理。

引理 11.17 (Lemma 3.4.16). *In any category with a terminal object 1, the pullback diagram*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ \pi_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow ! \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \end{array}$$

defines the product $A \times B$ of A and B .

证明. 根据拉回的定义，对于任何对象 X 以及态射对 $f : X \rightarrow A$ 和 $g : X \rightarrow B$ ，如果它们与终对象 1 构成的图表交换，即 $! \circ f = ! \circ g$ ，则存在唯一的态射 $h : X \rightarrow A \times B$ 使得 $\pi_A \circ h = f$ 且 $\pi_B \circ h = g$ 。

在具有终对象 1 的范畴中，对于任意对象 X ，到 1 的态射 $! : X \rightarrow 1$ 是唯一的。因此，条件 $! \circ f = ! \circ g$ 对于任何 $f : X \rightarrow A$ 和 $g : X \rightarrow B$ 总是自动成立的（因为它们的复合都是从 X 到 1 的唯一态射）。

由此，拉回的普遍性质简化为：对于任意对象 X 和态射对 (f, g) ，存在唯一的 $h : X \rightarrow A \times B$ 使得下表交换：

$$\begin{array}{ccccc} X & & & g & \\ & \searrow h & & \searrow & \\ & & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow \pi_A & & \downarrow ! \\ & & A & \xrightarrow{!} & 1 \end{array}$$

这恰好是二元乘积 $A \times B$ 的定义。 □

引理 11.18 (Lemma 3.4.17). *In any category with binary products, the pullback diagram*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & A \\ \ell \downarrow & \lrcorner & \downarrow (f, g) \\ B & \xrightarrow{(1_B, 1_B)} & B \times B \end{array}$$

defines an equalizer of the parallel pair $f, g : A \rightrightarrows B$.

证明. 首先我们来看看这个拉回所在的图里的两个 map 是怎么定义的。对于态射对 $f, g : A \rightarrow B$, 存在唯一的态射 $(f, g) : A \rightarrow B \times B$ 使得下表交换:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & f \swarrow & \downarrow (f,g) & \searrow g & \\ B & \xleftarrow{\pi_1} & B \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \end{array}$$

同理, 对角态射 $(1_B, 1_B) : B \rightarrow B \times B$ 定义为满足 $\pi_1 \circ (1_B, 1_B) = 1_B$ 且 $\pi_2 \circ (1_B, 1_B) = 1_B$ 的唯一态射。

接下来证明 $e : E \rightarrow A$ 是 f, g 的等化子, 即证明下述图表具有等化子的泛性质:

$$E \xrightarrow{e} A \rightrightarrows B$$

1. 验证 $f \circ e = g \circ e$: 由于 E 是拉回对象, 方框交换: $(f, g) \circ e = (1_B, 1_B) \circ \ell$ 。将此等式分别与投影 π_1, π_2 复合:

- ▶ $\pi_1 \circ (f, g) \circ e = \pi_1 \circ (1_B, 1_B) \circ \ell \implies f \circ e = 1_B \circ \ell = \ell$
- ▶ $\pi_2 \circ (f, g) \circ e = \pi_2 \circ (1_B, 1_B) \circ \ell \implies g \circ e = 1_B \circ \ell = \ell$

因此, $\ell := f \circ e = g \circ e$ 。

2. 构造所需的 Map 假设存在态射 $\phi : X \rightarrow A$ 使得 $f \circ \phi = g \circ \phi$ 。令 $\psi := f \circ \phi = g \circ \phi : X \rightarrow B$ 。考虑态射 $(f, g) \circ \phi$ 。由于:

$$\pi_1 \circ (f, g) \circ \phi = f \circ \phi = \psi, \quad \pi_2 \circ (f, g) \circ \phi = g \circ \phi = \psi$$

而对于对角态射复合 $(1_B, 1_B) \circ \psi$, 同样有:

$$\pi_1 \circ (1_B, 1_B) \circ \psi = 1_B \circ \psi = \psi, \quad \pi_2 \circ (1_B, 1_B) \circ \psi = 1_B \circ \psi = \psi$$

根据乘积映射的唯一性, 必有 $(f, g) \circ \phi = (1_B, 1_B) \circ \psi$ 。这构成了拉回图表的外层交换:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & \xrightarrow{\phi} & A \\ & \searrow h & & \downarrow e & \downarrow (f,g) \\ & E & \xrightarrow{e} & A & \\ & \downarrow \ell & & \downarrow (f,g) & \\ & B & \xrightarrow{(1_B, 1_B)} & B \times B & \end{array}$$

由拉回的普遍性质, 存在唯一的 $h : X \rightarrow E$ 使得 $e \circ h = \phi$ 。这证明了 e 是 f, g 的等化子。 $\square$

事实上, 一旦我们保证了二元乘积的存在性, 我们马上就可以保证任意有限多个对象的乘积都存在。

命题 11.19. 若范畴 $\mathcal{C}$ 具有终对象 1 (即空乘积) 且具有任意两个对象的二元乘积, 则 $\mathcal{C}$ 具有所有有限乘积。

证明. 我们对对象的个数 n 进行数学归纳法。

1. 基础情形:

- ▶ 当 $n = 0$ 时, 乘积即为终对象 1 , 根据假设它存在。
- ▶ 当 $n = 1$ 时, 对象 X_1 的乘积就是其自身, 显然存在。

► 当 $n = 2$ 时, 二元乘积 $X_1 \times X_2$ 根据假设存在。

2. 归纳步骤: 假设对于 $n = k$ 个对象, 其乘积 $P_k = \prod_{i=1}^k X_i$ 已经存在, 且对应的投影态射为 $\pi_i : P_k \rightarrow X_i$ ($i = 1, \dots, k$)。

现在考虑 $k+1$ 个对象 $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}$ 。我们利用二元乘积的假设, 构造 P_k 与 X_{k+1} 的乘积, 记为:

$$P_{k+1} := P_k \times X_{k+1}$$

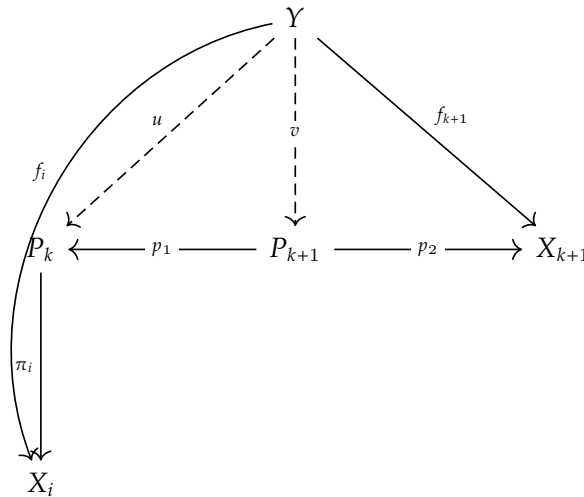
根据二元乘积的定义, 存在两个投影态射 $p_1 : P_{k+1} \rightarrow P_k$ 和 $p_2 : P_{k+1} \rightarrow X_{k+1}$ 。

3. 构造投影与验证普遍性质: 我们定义 P_{k+1} 到每个 X_i ($i = 1, \dots, k+1$) 的投影 q_i 如下:

$$q_i = \begin{cases} \pi_i \circ p_1 & 1 \leq i \leq k \\ p_2 & i = k+1 \end{cases}$$

为了证明 P_{k+1} 是这 $k+1$ 个对象的乘积, 我们需要验证普遍性质: 对于任意对象 Y 及态射族 $f_i : Y \rightarrow X_i$ ($i = 1, \dots, k+1$), 存在唯一的 $v : Y \rightarrow P_{k+1}$ 使得 $q_i \circ v = f_i$ 。

(1) 存在性: 根据 P_k 的普遍性质, 对于前 k 个态射 $f_1, \dots, f_k$, 存在唯一的 $u : Y \rightarrow P_k$ 使得 $\pi_i \circ u = f_i$ 。现在考虑 $u : Y \rightarrow P_k$ 和 $f_{k+1} : Y \rightarrow X_{k+1}$, 根据二元乘积 $P_{k+1} = P_k \times X_{k+1}$ 的普遍性质, 存在唯一的 $v : Y \rightarrow P_{k+1}$ 使得下表交换:



验证复合结果:

- 对于 $i \leq k$: $q_i \circ v = (\pi_i \circ p_1) \circ v = \pi_i \circ (p_1 \circ v) = \pi_i \circ u = f_i$ 。
- 对于 $i = k+1$: $q_{k+1} \circ v = p_2 \circ v = f_{k+1}$ 。

(2) 唯一性: 若存在 $v' : Y \rightarrow P_{k+1}$ 满足同样的条件, 则对于所有 $i \leq k$, 有 $\pi_i \circ (p_1 \circ v') = f_i$ 。根据 P_k 映射的唯一性, 必有 $p_1 \circ v' = u$ 。同时由条件知 $p_2 \circ v' = f_{k+1}$ 。再根据二元乘积 $P_k \times X_{k+1}$ 映射的唯一性 (其由 p_1, p_2 下的复合唯一确定), 必有 $v' = v$ 。

综上所述, P_{k+1} 满足乘积的定义。由数学归纳法知, 任意有限多个对象的乘积均存在。 □

利用上面的结论, 我们马上可以得到下面这样一个结果。

定理 11.20 (Theorem 3.4.18). *Any category with pullbacks and a terminal object has all finite limits. Dually, any category with pushouts and an initial object has all finite colimits.*

证明是显然的了。当然，这需要使用 3.2 节里那个结果（极限都可以表示为乘积和等化子）。

Bibliography

- [1] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016. 公开讲义版: <https://emilyriehl.github.io/files/context.pdf>.
- [2] 肖童仁, 范畴论讨论班讲义, 2025–2026。前四讲原始材料 (未刊)。