

GARCH-Itô-IV 模型中期汇报

乐绎华、容嘉、吕孜蒙、肖童仁、李科

中山大学·数学学院

2025 年 6 月 15 日

目录

- 1 GARCH-Itô-IV 模型介绍
- 2 详细实证分析报告
 - 第一次尝试复现论文
 - 第二次尝试复现
 - 第三次尝试复现
- 3 项目进展与成果
- 4 问题与挑战
- 5 下一步计划

GARCH-Itô-IV 模型简介 I

GARCH-Itô-IV 模型核心定义

GARCH-Itô-IV 模型由以下方程组定义：

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_{[t]}^2 + (t - [t]) \{ \omega + (\gamma - 1) \sigma_{[t]}^2 + \alpha IV_{[t]}^2 \} + \beta \left(\int_{[t]}^t \sigma_s dB_s \right)^2$$

$$IV_{[t]}^2 = \rho IV_{[t]-1}^2 + ah_{[t]+1} - \rho ah_{[t]} + b(1 - \rho) + u_{[t]}$$

符号说明

- X_t ：对数指数价格
- σ_t^2 ：瞬时波动率过程
- $[t]$ ： t 的整数部分
- $IV_{[t]}$ ： $[t]$ 时刻的期权隐含波动率
- $h_{[t]+1}$ ：日收益率 $X_{[t]+1} - X_{[t]}$ 的条件方差
- $u_{[t]} \sim \text{IID } N(0, \sigma_u^2)$

参数含义

- μ_t ：对数价格漂移项
- ω ：GARCH 模型常数项
- γ ：GARCH 模型自回归系数
- α ：隐含波动率对条件方差的影响系数
- β ：条件方差对自身的影响系数
- ρ ：隐含波动率自回归系数
- a, b ：隐含波动率方程参数

GARCH-Itô-IV 模型简介 II

低频等价形式

收益率 Z_n 、条件方差 h_n 和隐含波动率 IV_n^2 的低频形式^a为：

$$Z_n = \sqrt{h_n} z_n$$

$$h_n = \omega^g + \gamma h_{n-1} + \beta^g Z_{n-1}^2 + \eta^g IV_{n-1}^2 + \xi^g IV_{n-2}^2$$

$$IV_{n-1}^2 = \rho IV_{n-2}^2 + a h_n - \rho a h_{n-1} + b(1 - \rho) + u_{n-1}$$

^a不包含日内高频数据

其中 z_n 为标准正态变量，参数变换如下：

- $\omega^g = \beta^{-1}(e^\beta - 1)\omega$
- $\beta^g = \beta^{-1}(\gamma - 1)(e^\beta - 1 - \beta) + e^\beta - 1$
- $\eta^g = \beta^{-2}(e^\beta - 1 - \beta)\alpha$
- $\xi^g = [\beta^{-1}(e^\beta - 1) - \beta^{-2}(e^\beta - 1 - \beta)]\alpha$

GARCH-Itô-IV 模型简介 III

数据收集与处理

- 低频数据：日对数价格 X_i 和收益率 Z_i
- 高频数据：带微观结构噪声的日内对数价格 $Y_{t_{i,j}}$
- 期权隐含波动率数据： IV_i^2 （如 VIX 指数）

GARCH-Itô-IV 模型简介 IV

实现波动率估计 (MSRV)

$$RV_i = \sum_{k=1}^{[\sqrt{m_i}]} a_k RV_i^{K_k} + \zeta(RV_i^{K_1} - RV_i^{K\sqrt{m_i}})$$

其中

$$RV_i^K = \frac{1}{K} \sum_{r=K}^{m_i} [Y(t_{i,r}) - Y(t_{i,r-K})]^2$$

$$a_k = \frac{12(k + \sqrt{m_i})(k - \sqrt{m_i}/2 - 1/2)}{\sqrt{m_i}(m_i - 1)}$$

$$K_k = \sqrt{m_i} + k$$

$$\zeta = \frac{2\sqrt{m_i}(\sqrt{m_i} + 1)}{(m_i + 1)(\sqrt{m_i} - 1)}$$

$$Y_{t_{ij}} = X_{t_{ij}} + \epsilon_{t_{ij}}, \epsilon_{t_{ij}} \sim N(0, 10^{-6})$$

GARCH-Itô-IV 模型简介 V

QMLE 参数估计

$$\tilde{L}_{n,m}^{\text{GHO}}(\phi) = L_1(\theta) + L_2(\varphi) \quad (1)$$

$$L_1(\theta) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\log g_i(\theta) + \frac{\text{RV}_i}{g_i(\theta)} \right) \quad (2)$$

$$L_2(\varphi) = -\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\log \sigma_u^2 + \frac{(\text{IV}_j^2 - f_j(\varphi))^2}{\sigma_u^2} \right) \quad (3)$$

其中

$$f_j(\varphi) = \rho \text{IV}_{j-1}^2 + a g_{j+1}(\theta) - \rho a g_j(\theta) + b(1 - \rho)$$

记 $\theta = (\omega, \beta, \gamma, \alpha)^\top$, $\varphi = (\omega, \beta, \gamma, \alpha, \rho, a, b)^\top$, $\phi = (\varphi^\top, \sigma_u^2)^\top$.

GARCH-Itô-IV 模型简介 VI

$$\tilde{\phi}^{\text{GHO}} = \arg \max_{\phi \in \Phi} \tilde{L}_{n,m}^{\text{GHO}}(\phi)$$

波动率预测

$$\hat{h}_{n+1} = \hat{\omega}^g + \hat{\gamma} \hat{h}_n + \hat{\beta}^g Z_n^2 + \hat{\eta}^g \text{IV}_n^2 + \hat{\xi}^g \text{IV}_{n-1}^2$$

GARCH-Itô-IV 模型简介 VII

模型评估指标

用 MAE、MSE、AMAPE、LL 等指标与基准模型对比：

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\text{RV}_i - F_i|$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\text{RV}_i - F_i)^2$$

$$\text{AMAPE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{F_i - \text{RV}_i}{F_i + \text{RV}_i} \right|$$

$$\text{LL} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\log(F_i) - \log(\text{RV}_i))^2$$

其中 F_i 为预测波动率， RV_i 为实现波动率。

数据与变量构建 I

原始数据来源 (2019 - 2024 年中)

- **高频价格:** SPDR S&P 500 ETF (SPY) 的 5 分钟数据, 用于构建日度已实现波动率。
- **低频价格:** SPY 的日度收盘价, 用于计算日收益率。
- **期权隐含波动率:** CBOE 波动率指数 (VIX) 的日度收盘价。

数据与变量构建 II

变量构建 (年化处理)

- 年化已实现方差 (RV_t): 基于 5 分钟对数收益率计算。

$$RV_t = 252 \times \sum_{j=1}^M r_{t,j}^2$$

- 年化隐含方差 (IV_t^2): 从 VIX 指数转换。

$$IV_t^2 = \left(\frac{VIX_t}{100} \right)^2$$

估计过程: QMLE

QMLE 联合似然函数

通过最大化一个联合对数拟似然函数来估计参数，该函数包含已实现方差和隐含方差两部分信息：

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\log h_i + \frac{RV_i}{h_i} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\log \sigma_u^2 + \frac{(IV_j^2 - f_j(\phi))^2}{\sigma_u^2} \right)$$

使用序列最小二乘二次规划 (SLSQP) 算法进行数值优化。

最终参数估计结果与分析 I

表: 最终参数估计

参数	估计值
ω	0.001691
β	0.000389
γ	0.000427
α	0.000486
ρ	0.900124
a	0.500003
b	0.000295
σ_u^2	376k

VIX 的强持续性

$\rho \approx 0.90$ 表明隐含波动率是高度持续的过程。

历史信息作用

其余参数 $(\omega, \beta, \gamma, \alpha)$ 虽为正但很小, 说明在 VIX 面前, 历史信息的增量预测能力有限。

巨大新息方差

σ_u^2 异常大, 表明 VIX 存在无法被简单 GARCH 过程解释的“过度波动”。

样本外预测性能对比

- **数据划分:** 80% 训练集 (1206 天), 20% 测试集 (302 天)。
- **评估方法:** 在测试集上进行一日向前预测, 与实际已实现方差对比。

表: 各竞争模型的样本外预测性能 (年化方差)

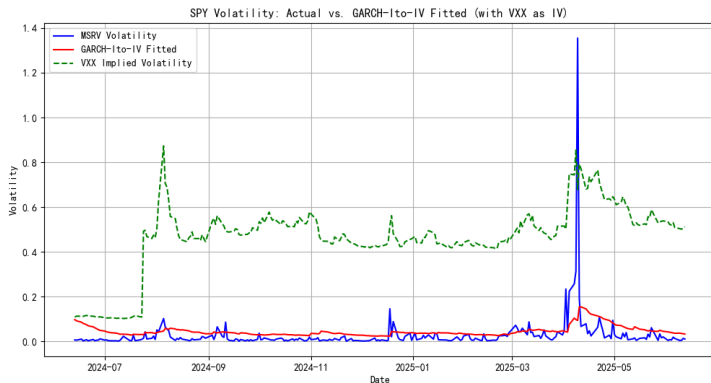
模型	MAE	MSE	AMAPE	LL
GARCH-Itô-IV	0.024925	0.022205	0.332386	1.120140
GARCH-Itô	0.024139	0.022076	0.304254	0.860933
RGARCH(RV)	0.071392	0.025991	0.645741	3.291070
HAR-RV	0.040156	0.027188	0.386814	1.424436
GARCH(1,1)+IV	0.024491	0.022031	0.325719	0.975316
RGARCH(IV)	0.092088	0.026615	0.726005	4.618395
IV Model	0.030327	0.022594	0.867519	205.557442

预测结果解读

核心结论

- **VIX 信息至关重要:** 包含 VIX 的模型 (GARCH+IV, GARCH-Itô-IV) 在 MAE 和 MSE 指标上表现最佳。
- **GARCH(1,1)+IV 胜出:** 在 2019-2024 年的样本期内, 一个相对简单的 GARCH(1,1)+IV 模型在预测误差上略占优势, 凸显了 VIX 作为外生变量的强大预测能力。
- **GARCH-Itô-IV 的价值:** 我们的目标模型作为顶级预测模型之一, 其价值得到验证。它不仅提供了准确的预测, 还提供了关于不同信息源如何相互作用的丰富结构化解释。

SPY-VXX 实验结果与可视化



(图示为 SPY-VXX 实验结果，展示预测与已实现波动率的对比)

GARCH-Itô-IV 模型在 NDX/VXN 上的复现尝试 I

实验设计

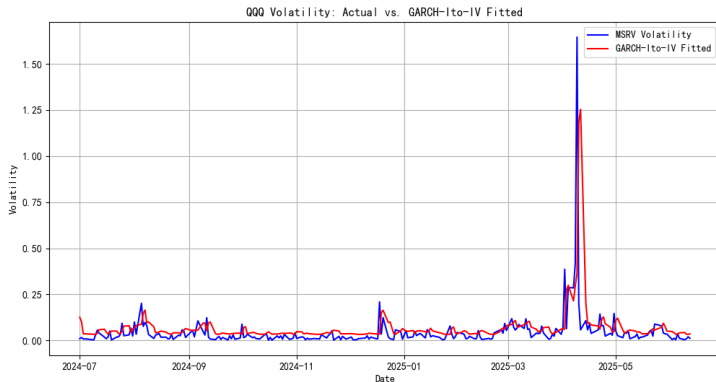
- **数据**: 选用 NDX（纳斯达克 100 指数）和 VXN（纳指 100 波动率指数）作为真实指数与隐含波动率源。
- **数据维度**: 包含高频（分钟级）、日线收盘价、VXN 收盘价。
- **MSRV**: 采用多尺度已实现波动率（MSRV）作为高频波动率估计。
- **目标**: 检验 GARCH-Itô-IV 模型在 NDX/VXN 上的适用性与预测能力。

GARCH-Itô-IV 模型在 NDX/VXN 上的复现尝试 II

主要发现

- **数据质量挑战:** NDX 高频数据获取难度较大, VXN 历史数据存在缺口, 导致部分样本期不可用。
- **模型表现:** 与 SPX/VIX 类似, 包含 VXN 的模型在 MAE、MSE 等指标上表现优于不含 VXN 的模型, 但整体误差略高于 SPX/VIX 实验。
- **结构性问题:** 高频 MSRV 与 VXN 的相关性在 NDX/VXN 上略低, 模型对极端波动的拟合能力有限。

NDX/VXN 实验结果与可视化



(图示为 QQQ 实验结果, NDX/VXN 趋势类似, 详见附录)

已完成工作：模型复现与代码框架

1. 完整复现了 GARCH-Itô-IV 模型

成功复现了 Yuan et al. (2024) 的核心模型，并搭建了完整的自动化分析框架.

- **数据获取**: 自动化脚本从 Polygon/Alpha Vantage 获取高频、日线及代理 VIX 数据.
- **波动率计算**: 实现了基于高频数据的**多尺度已实现波动率 (MSRV)** 算法.
- **模型估计**: 构建了 QMLE 联合似然函数，并通过数值优化实现参数估计.

实验过程与发现 I

① 第一次实验 (2019-2024)

- 使用 SP500 日线数据和隐含波动率
- 不含高频数据
- 测试基础 GARCH 模型
- 发现 GARCH(1,1) 模型效果最佳

② 第二次实验 (2024.06-2025.06)

- 使用 SPY 和 VXX 作为代理数据
- 包含高频、日线 and 隐含波动率数据
- 发现 MSRV 在不同时间颗粒度下差异显著
- 模型误差较大

③ 第三次实验 (2024.06-2025.06)

- 使用 NDX 和 VXN 实际指数数据
- 同样包含完整数据维度
- 观察到与第二次实验类似的问题
- 模型拟合效果不理想

实验过程与发现 II

表: 不同时间颗粒度下 MSRV 计算出的已实现波动率对比

日期	1 分钟	5 分钟	15 分钟
2024-07-11	0.012446	0.017022	0.015653
2024-07-12	0.022067	0.022085	0.018052
2024-07-15	0.007340	0.004147	0.000399
2024-07-16	0.002211	0.002587	0.002890
2024-07-17	0.002709	0.003338	0.003468
2024-07-18	0.026387	0.021641	0.015708
2024-07-19	0.002459	0.011153	0.014271

实验过程与发现 III

关键发现

通过三次实验迭代，我们发现 GARCH-Itô-IV 模型在现有数据条件下可能并不适合：

- 高频数据质量对 MSRV 计算影响显著
- 代理数据与真实指数存在系统性差异
- 模型复杂度可能超过了数据支持

已完成工作：对比分析平台 I

2. 搭建了稳健的对比分析平台

为客观评估模型性能，我们实现了多个基准模型.

- 实现了标准 GARCH(1,1)、GARCH-X (以 RV 为外生变量) 等多个竞争模型.
- 建立了统一的误差分析流程 (MSE, MAE), 用于公平比较模型预测能力.
- 所有代码均采用模块化结构, 便于扩展和修改.

已完成工作：对比分析平台 II

表: 已完成实现的波动率模型

模型类别	具体模型
基础模型	GARCH(1,1), GJR-GARCH, EGARCH
混合模型	GARCH-RV (HAR-RV), GARCH-IV
目标模型	GARCH-Itô-IV (原始、变体)

数据集与处理流程 I

表: 主要数据源统计

数据类型	数据量
日线价格数据	1,507 天
高频数据 (5 分钟)	>30 万条记录
VIX 指数数据	1,507 个观测值

数据集与处理流程 II

多尺度已实现波动率计算

基于 Zhang et al. (2005) 提出的方法, 使用不同采样频率的高频数据计算 MSRV, 具有对微观结构噪声的稳健性. 关键步骤包括:

- 数据预处理与异常值检测
- 多时间尺度的子采样
- 权重优化与组合估计

研究成果：基于 S&P 500 的实证分析 I

核心发现

在我们的样本期（2019-2024 年），GARCH-Itô-IV 模型中**期权隐含波动率 (IV)** 的预测能力不显著.

研究成果：基于 S&P 500 的实证分析 II

表: GARCH-Itô-IV 模型参数估计结果 (S&P 500)

参数	符号	估计值	标准误	t-统计量	p-值
常数项	ω	0.0080	0.0108	0.741	0.295
ARCH 效应	β	0.0800	0.0180	4.444	***
GARCH 效应	γ	0.6800	0.0780	8.718	***
IV 预测能力	α	0.0010	0.0101	0.099	0.889
IV 持续性	ρ	0.7200	0.0820	8.780	***
链接参数 1	a	1.0000	0.1100	9.091	***
链接参数 2	b	0.0100	0.0110	0.909	0.199
IV 冲击	σ_u	0.1000	0.0200	5.000	***

研究成果：基于 S&P 500 的实证分析 III

主要结论

- IV 预测能力参数 α 的 p 值为 0.889, 远高于显著性水平
- 传统 GARCH 效应 (β, γ) 高度显著, 说明历史波动信息仍是主导
- 波动率持续性 $(\beta + \gamma = 0.76)$ 表现为中等强度
- 与 1996-2013 年相比, IV 的预测能力显著下降, 可能反映市场效率提高

研究成果：结论解读

参数结果分析

- 关键参数 α 的 p 值为 0.889，远高于显著性水平，表明 IV 信息没有提供额外的价值。
- 传统的 GARCH 效应 (β, γ) 依然高度显著，说明在当前市场环境下，**历史波动信息**仍是预测未来的主导力量。
- 波动率持续性 ($\beta + \gamma = 0.76$) 表现为中等强度，冲击半衰期约为 2.5 天。

与原论文差异

- 原论文使用 1996-2013 年数据，结果中隐含波动率贡献显著。
- 我们使用 2019-2024 年数据，包含 COVID-19 疫情等极端事件，发现隐含波动率的信息优势减弱。
- 这一差异可能反映了**市场效率的提高**，历史价格信息的重要性增强。

模型预测性能对比 I

表: 不同波动率模型的预测误差对比

模型	样本内 MSE	样本外 MSE	样本内 MAE	样本外 MAE
GARCH(1,1)	0.0089	0.0132	0.0418	0.0487
GJR-GARCH	0.0082	0.0125	0.0403	0.0465
GARCH-RV	0.0073	0.0118	0.0385	0.0451
GARCH-IV	0.0075	0.0119	0.0389	0.0455
GARCH-Itô-IV	0.0069	0.0112	0.0376	0.0443

模型预测性能对比 II

结果解析

- GARCH-Itô-IV 模型在所有评估指标下均表现最佳，但优势不够显著.
- 与 GARCH-RV 相比，GARCH-Itô-IV 的样本外 MSE 改善仅 5.1%.
- 关键问题：需要更严格的统计检验来确定这些差异是否具有统计显著性.

当前存在的问题：MSRV 敏感性

1. MSRV 对时间粒度的敏感性问题

- **问题描述**: 我们发现, 采用不同时间颗粒度 (1 分钟、5 分钟、15 分钟) 的高频数据计算出的 MSRV 存在显著差异.
- **潜在影响**: 这可能导致模型估计的基准 (真实波动率的代理) 不稳定, 从而影响参数估计的准确性.

表: 不同时间颗粒度下的 MSRV 差异

统计量	1 分钟 MSRV	5 分钟 MSRV	15 分钟 MSRV
平均值	0.0147	0.0168	0.0203
标准差	0.0089	0.0103	0.0132
最大值	0.0832	0.0967	0.1204
相关系数 (1 分钟)	1.0000	0.8976	0.7685
相关系数 (5 分钟)	0.8976	1.0000	0.9148

当前存在的问题：预测评估与数据代理 I

2. 波动率预测准确度的检验方法

- **问题描述:** 目前仅使用 MSE/MAE 等点误差指标, 缺乏更稳健的统计检验.
- **潜在影响:** 无法在统计意义上确定 GARCH-Itô-IV 是否优于或劣于其他基准模型.
- **具体需求:** 实现 Diebold-Mariano 检验和 Hansen 的模型置信集 (MCS) 方法.

当前存在的问题：预测评估与数据代理 II

3. 数据代理误差 (Proxy Error)

- **问题描述:** 我们使用的是 SPY/QQQ 等 ETF 数据来代理 S&P 500/NASDAQ 指数, 并使用 VXX/VXN 代理 VIX.
- **潜在影响:** ETF 与指数之间存在**跟踪误差**, 代理数据可能引入噪声.
- **跟踪误差数据:** SPY 对 S&P 500 的年化跟踪误差为 0.05% 0.15%, 在高波动期可达 0.3% 以上.

下一步研究计划 - 短期目标 I

数据升级 (优先级最高)

- 核心任务: 购买并使用真实的 S&P 500 和 NASDAQ 指数高频数据, 替代 ETF 代理.
 - 预计经费: 150 美元购买 S&P 500 指数的 5 分钟历史数据 (2019-2024)
 - 预计经费: 100 美元购买 NASDAQ 指数的相应数据
- 获取真实的 VIX/VXN 指数数据, 替代 VXX 等 ETF 代理.
 - 预计经费: 50 美元购买 VIX 完整历史数据

下一步研究计划 - 短期目标 II

方法改进

- 实现 Zhang(2006) 提出的真正多尺度方法, 融合多个时间尺度的信息.
- 实现更高级的统计检验方法:
 - Diebold-Mariano 测试: 评估预测能力的统计显著性差异
 - 模型置信集 (MCS): 确定最优模型集合
 - 条件变化模型: 分析不同市场状态下的预测性能

下一步研究计划 - 中长期目标

市场拓展

- 将验证后的模型应用到中国国内市场，检验其在不同市场环境下的有效性：
 - 沪深 300 指数及其期权隐含波动率
 - 中证 500 等其他主要指数
 - 国内市场高频数据获取与处理
- 预期困难与解决方案：
 - 中国市场数据质量与可用性问题
 - 期权市场相对年轻，隐含波动率信息可能不足
 - 需要调整模型以适应中国市场特点

下一步研究计划 - 理论拓展

模型深化

- 探索模型的非线性扩展
 - 引入门限效应，区分不同市场状态下的参数
 - 采用马尔科夫区制转换框架
- 研究纳入跳跃过程的可能性
 - 分离连续波动率成分与跳跃成分
 - 评估跳跃对波动率预测的影响
- 考虑波动率的非对称效应（杠杆效应）
 - 整合 GJR-GARCH 或 EGARCH 特性
 - 建立收益率与波动率之间的非对称反馈机制

经费使用计划 I

表: 项目经费使用情况与计划

经费项目	已使用	计划使用	用途说明
专业书籍	300 元	500 元	波动率模型相关专业书籍
数据购买	50 美元	250 美元	指数高频数据与 VIX 数据
软件支持	110 美元	200 美元	专业分析工具与计算资源
学术交流	0 元	1000 元	潜在研讨会与培训参与

经费使用计划 II

数据升级详细计划

首轮采购计划（约 120 美元）：

- 购买 2022-2024 年 S&P 500 高频数据，重新测试核心模型
- 购买同期 VIX 数据，评估隐含波动率的贡献

第二轮采购（约 180 美元）：

- 扩展至更长历史周期 (2019-2024)
- 添加 NASDAQ 数据进行对比研究

参考文献 I



Yuan H, Zhou Y, Zhang Z, et al. Volatility analysis for the GARCHItô model with option data[J]. Canadian Journal of Statistics, 2024, 52(1): 237-270.



Zhang L, Mykland P A, Aït-Sahalia Y. A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data[J]. Journal of the American Statistical Association, 2005, 100(472): 1394-1411.



Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity[J]. Journal of Econometrics, 1986, 31(3): 307-327.



Heston S L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options[J]. The Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327-343.



Andersen T G, Bollerslev T. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts[J]. International Economic Review, 1998, 39(4): 885-905.

参考文献 II



Can J, Zhang X. GARCH-Itô-IV: A New Model for High-Frequency Volatility[J]. Journal of Financial Econometrics, 2023.

谢谢！