

黎曼曲面 I

复分析、黎曼曲面与 Hodge 定理

Tongren Xiao

2026 年 7 月

Contents

Contents	ii
1. 复分析基础	1
1.1. 全纯函数、最大模原理与 Schwarz 引理	1
1.2. 调和函数的基本结论	4
1.3. Riemann 映照定理	6
2. 黎曼曲面、微分形式与亚纯函数	8
2.1. 黎曼曲面的定义与基本例子	8
2.2. 微分形式的语言	12
2.3. 亚纯函数与分歧	23
3. Hodge 定理	32
3.1. 因子	32
3.2. Hodge 定理	37
A. 拓扑补充	55
A.1. 复分析标准工具	55
A.2. 相容度量	56
A.3. 张量积与复化	56
A.4. Hodge 定理中的 PDE 背景	57
Hodge 定理参考文献说明	58

本章回顾后文需要的单复变工具：最大模原理、Schwarz 引理、Liouville 定理、圆盘与平面的自同构、调和共轭以及 Riemann 映照定理。最大模原理说明紧致黎曼面上的全纯函数过少，因此必须引入允许孤立极点的亚纯函数。

1.1. 全纯函数、最大模原理与 Schwarz 引理

本节先回顾几个单复变中的基本结论。这里的区域、全纯函数、Cauchy-Riemann 方程等概念均沿用通常复变函数论中的定义。

事实 1.1 (平均值公式). 若 f 在圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ 内全纯，并连续到边界，则对 $0 < r \leq R$ 有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta.$$

事实 1.2 (最大模原理). 设 D 为区域， $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯函数。若 $|f|$ 在 D 内部取得最大值，则 f 为常值函数。

这些结论在本讲义中作为单复变函数论的基本事实使用，证明可由 Cauchy 积分公式或平均值公式推出。

推论 1.3 (最小模原理). 若 f 在区域 D 上全纯且无零点，则 $|f|$ 在 D 内部不能取得正的最小值，除非 f 为常值。

证明. 因为 f 在 D 上无零点， $1/f$ 仍是 D 上全纯函数。

若 $|f|$ 在内部点 a 取得正的最小值，则 $|1/f|$ 在 a 取得最大值。由最大模原理 1.2， $1/f$ 为常值，从而 f 也为常值。□

最大模原理会在黎曼曲面上产生一个强烈的全局后果：若 X 是紧致黎曼曲面， $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯，则 f 连续，因而 $|f|$ 也是 X 上的连续函数。由紧致性， $|f|$ 在 X 上取得最大值；再由最大模原理， f 必为常值。因此，紧致表面上的全纯函数过少。为了得到非平凡的函数理论，必须允许函数在孤立点出现极点，也就是研究亚纯函数。第 2.3 节会把这一点放到黎曼曲面的语言中。

Schwarz 引理是最大模原理在单位圆盘上的一个基本应用。

事实 1.4 (Schwarz 引理). 设 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 为全纯函数，且 $f(0) = 0$ 。则

$$|f'(0)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq |z| \quad (z \in \mathbb{D}).$$

若 $|f'(0)| = 1$, 或者存在 $z \neq 0$ 使 $|f(z)| = |z|$, 则存在实数 θ , 使得

$$f(z) = e^{\sqrt{-1}\theta} z, \quad z \in \mathbb{D}.$$

推论 1.5. *Liouville* 定理: 若 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为有界全纯函数, 则 f 为常值函数。

证明. 设 $|f| \leq M$ 。若 $M = 0$, 则 $f \equiv 0$ 。以下设 $M > 0$ 。

先证明 $f'(0) = 0$ 。对任意 $R > 0$ 与任意 $\varepsilon > 0$, 定义

$$F_{R,\varepsilon}(z) = \frac{f(Rz) - f(0)}{2M + \varepsilon}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

当 $z \in \mathbb{D}$ 时, $Rz \in \mathbb{C}$, 所以 $f(Rz)$ 有定义; 并且

$$|f(Rz) - f(0)| \leq |f(Rz)| + |f(0)| \leq 2M < 2M + \varepsilon.$$

因此 $F_{R,\varepsilon}$ 确实把 $\mathbb{D}$ 映入 $\mathbb{D}$ 。同时

$$F_{R,\varepsilon}(0) = \frac{f(0) - f(0)}{2M + \varepsilon} = 0.$$

由 Schwarz 引理, $|F'_{R,\varepsilon}(0)| \leq 1$ 。而

$$F'_{R,\varepsilon}(0) = \frac{Rf'(0)}{2M + \varepsilon},$$

所以

$$|f'(0)| \leq \frac{2M + \varepsilon}{R}.$$

令 $R \rightarrow \infty$ 得 $f'(0) = 0$ 。

对任意 $a \in \mathbb{C}$, 考虑平移后的整函数

$$f_a(z) = f(a + z).$$

它仍然有界, 且由上一步应用于 f_a 得 $f'_a(0) = 0$ 。但 $f'_a(0) = f'(a)$, 所以 $f'(a) = 0$ 。由于 a 任意, $f' \equiv 0$ 。于是 f 在连通区域 $\mathbb{C}$ 上为常值。□

定理 1.6 (单位圆盘的全纯自同构). 作为 Schwarz 引理的推论, 单位圆盘的全纯自同构可以完全刻画如下: 如果 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 是双全纯自同构, 则 f 必为一个 *Mobius* 变换。具体地, 存在 $z_0 \in \mathbb{D}$ 与 $\theta \in \mathbb{R}$, 使

$$f(z) = e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{z - z_0}{\overline{z_0}z - 1}.$$

证明. 记 $z_0 = f(0)$ 。定义圆盘自同构

$$\phi_{z_0}(w) = \frac{w - z_0}{\overline{z_0}w - 1}.$$

先说明它确实把 $\mathbb{D}$ 映入 $\mathbb{D}$ 。直接计算得

$$1 - |\phi_{z_0}(w)|^2 = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |w|^2)}{|\overline{z_0}w - 1|^2}.$$

当 $|z_0| < 1$ 且 $|w| < 1$ 时, 右端为正, 因此 $|\phi_{z_0}(w)| < 1$ 。并且

$$\phi_{z_0}(z_0) = 0,$$

所以

$$g = \phi_{z_0} \circ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

是双全纯映射, 且 $g(0) = 0$ 。

由 Schwarz 引理, $|g'(0)| \leq 1$ 。其逆映射 $h = g^{-1}$ 也满足 $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 且 $h(0) = 0$, 故 $|h'(0)| \leq 1$ 。由 $h(g(z)) = z$ 得

$$h'(0)g'(0) = 1.$$

因此 $|g'(0)| = 1$ 。Schwarz 引理的等号情形给出

$$g(z) = e^{\sqrt{-1}\theta} z.$$

于是

$$\phi_{z_0}(f(z)) = e^{\sqrt{-1}\theta} z.$$

解出 f , 并把常数相位重新记号, 即得

$$f(z) = e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{z - z'_0}{\overline{z'_0}z - 1}$$

的形式, 其中 $z'_0 \in \mathbb{D}$ 。

□

定理 1.7 ($\mathbb{C}$ 的全纯自同构). 作为 Schwarz 引理和 Liouville 定理的推论, $\mathbb{C}$ 的全纯自同构也完全刚性: 如果 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯自同构, 则

$$f(z) = az + b, \quad a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

证明. 令 $b = f(0)$, 并令

$$F(z) = f(z) - b.$$

平移 $T_b(w) = w - b$ 是 $\mathbb{C}$ 的双全纯自同构, 所以 $F = T_b \circ f$ 仍是 $\mathbb{C}$ 的双全纯自同构, 且 $F(0) = 0$ 。证明 $F(z) = az$ 后, 再加回 b 即得 $f(z) = az + b$ 。因此下文直接假设 $f(0) = 0$ 。

令

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

因为 f 在 0 附近全纯且 $f(0) = 0$, 所以 g 在 0 处由可去奇点定理补成全纯函数。又因为 f 一一且 $f(0) = 0$, 当 $z \neq 0$ 时 $f(z) \neq 0$ 。若 $g(0) = f'(0) = 0$, 则全纯反函数定理说明 f 在 0 处不能局部双全纯, 矛盾。因此 g 在 $\mathbb{C}$ 上处处非零。

下面证明 $1/g$ 有界。由于 f^{-1} 在 0 处连续, 存在 $c > 0$, 使得

$$|w| < c \implies |f^{-1}(w)| < 1.$$

等价地, 若 $|z| \geq 1$, 则 $|f(z)| \geq c$ 。

还需要知道 $|f(z)| \rightarrow \infty$ 当 $|z| \rightarrow \infty$ 。否则存在 $z_j \rightarrow \infty$ 而 $|f(z_j)|$ 有界。取子列使 $f(z_j) \rightarrow w$ 。由 f^{-1} 的连续性,

$$z_j = f^{-1}(f(z_j)) \rightarrow f^{-1}(w),$$

矛盾。于是可定义

$$\tilde{g}(z) = \begin{cases} c/f(1/z), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

由 $|f(w)| \rightarrow \infty$ 可知 0 是可去奇点, 且补值为 0 后 $\tilde{g}$ 在 $\mathbb{D}$ 上全纯。若 $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, 则 $|1/z| > 1$, 从而 $|f(1/z)| \geq c$, 所以 $|\tilde{g}(z)| \leq 1$ 。实际上值落在闭圆盘中; 若某一点取到模 1, 由最大模原理 $\tilde{g}$ 为常值, 这与 $\tilde{g}(0) = 0$ 矛盾。因此 $\tilde{g}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 且 $\tilde{g}(0) = 0$ 。

由 Schwarz 引理, $|\tilde{g}(z)| \leq |z|$ 。令 $z = 1/w$, 得

$$|f(w)| \geq c|w|, \quad |w| > 1.$$

因此

$$\left| \frac{1}{g(w)} \right| = \left| \frac{w}{f(w)} \right| \leq \frac{1}{c}$$

在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ 上有界; 在紧集 $\overline{\mathbb{D}}$ 上, $1/g$ 连续, 故也有界。由 Liouville 定理, $1/g$ 为常数, 所以 g 为常数, $f(z) = az$ 。□

注 1.8 (不同意义下的“自同构”)。定理 1.7 只讨论双全纯自同构, 即同时保持复结构和全纯函数论的自同构。如果换一个范畴, 结论会完全不同。

作为域, $\mathbb{R}$ 的自同构只有恒等映射: 任一域自同构固定 $\mathbb{Q}$, 且把正数送到正数, 因为正数正好是非零平方; 于是它保持序, 再由有理数的稠密性推出处处固定。这个标准论证可参见 Conrad 关于 $\mathbb{R}$ 的域自同构的讲义 [13]。作为域, $\mathbb{C}$ 的连续自同构只有恒等与复共轭; 但若不要求连续, 在选择公理下, 借助 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ 的超越基可以构造大量非连续域自同构。相关背景可参见 Lang 的代数教材中关于超越基与代数闭包延拓的讨论 [11]。

作为拓扑空间, $\mathbb{R}$ 的自同胚就是所有严格单调连续双射; $\mathbb{C}$ 的自同胚群则巨大得多。全纯性把这个巨大自由度压缩成仿射映射, 这正是复分析刚性的一个早期体现。拓扑自同胚的基本性质可参见 Munkres 的拓扑教材 [12]。

1.2. 调和函数的基本结论

本节回顾调和函数与全纯函数之间的基本联系, 重点是调和共轭、平均值公式和最大值原理。

定义 1.9 (调和函数). 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为区域, $u \in C^2(\Omega)$ 为实值函数. 若

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 u 为 Ω 上的调和函数。

事实 1.10 (平面 Poincare 引理). 若 $U \subset \mathbb{C}$ 为圆盘, α 为 U 上的闭 1-形式, 则存在函数 v 使

$$dv = \alpha.$$

这个结论将在第 2.2 节用微分形式语言证明, 见定理 2.27。

定理 1.11 (调和共轭). 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为调和函数。

1. 对任意 $z_0 \in \Omega$, 存在 z_0 的邻域 $B \subset \Omega$ 及 B 上的调和函数 v , 使 $u + \sqrt{-1}v$ 在 B 上全纯。
2. 若 Ω 单连通, 则存在 Ω 上的调和函数 v , 使 $u + \sqrt{-1}v$ 在 Ω 上全纯。

证明. 若 $f = u + \sqrt{-1}v$ 全纯, 则 Cauchy-Riemann 方程给出 $u_x = v_y$ 、 $u_y = -v_x$ 。再求一次偏导并使用混合偏导相等, 得到

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

反过来, 设 u 调和。对任意 $z_0 \in \Omega$, 取小圆盘 $B \subset \Omega$ 。令

$$\alpha = -u_y dx + u_x dy.$$

由于

$$d\alpha = (u_{xx} + u_{yy}) dx \wedge dy = 0,$$

α 是闭 1-形式。由事实 1.10, 存在函数 v 使 $dv = \alpha$, 也就是

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x.$$

于是 $u + \sqrt{-1}v$ 满足 Cauchy-Riemann 方程, 从而在 B 上全纯。由上半部分, 全纯函数的虚部 v 也是调和函数。这证明了局部情形。单连通区域上的整体情形同理, 只需使用单连通区域上的闭 1-形式有全局原函数这一事实; 后文会用 de Rham 语言解释这个拓扑条件。□

推论 1.12 (调和函数的平均值公式). 若 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为调和函数, 且 $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$, 则

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta.$$

证明. 取稍大的圆盘 $B_R(z_0) \subset \Omega$, 其中 $R > r$ 。由定理 1.11, 在 $B_R(z_0)$ 上存在调和共轭 v , 使 $F = u + \sqrt{-1}v$

全纯。对 F 在圆周 $|z - z_0| = r$ 上使用全纯函数的平均值公式，得

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta.$$

两边取实部，就得到 u 的平均值公式。 □

事实 1.13 (调和函数的最大值原理). 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为调和函数。若 u 在 Ω 内部取得局部最大值或局部最小值，则 u 为常值。等价地， $|u|$ 在内部不能取得局部最大值，除非 u 为常值。

Perron 方法、圆盘 Dirichlet 问题、Poisson 积分公式以及 Harnack 理论主要服务于边值问题和单值化定理；本讲义只使用上面的三个基本结论。

1.3. Riemann 映照定理

平面区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 称为单连通区域，是指 Ω 连通，并且每条闭曲线都可以在 Ω 内连续收缩到一点。直观地说，单连通区域没有洞。

定理 1.11 已经说明，单连通性会消除调和共轭的整体障碍：局部可以构造的共轭函数，在单连通区域上可以全局构造。因此，单连通区域是复分析中最自然的一类平面区域。Riemann 映照定理进一步说明，在全纯同构意义下，除整个平面外，所有单连通平面区域都与单位圆盘相同。这是一个远强于拓扑分类的结论。

定理 1.14 (Riemann 映照定理). 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中单连通区域。若 $\Omega \neq \mathbb{C}$ ，则存在 Ω 到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的双全纯同构。

注 1.15 (证明思路). 证明分三步。

第一步，把任意 $\Omega \neq \mathbb{C}$ 的单连通区域单全纯地嵌入单位圆盘。这一步用到单连通区域上可以选取平方根分支。

第二步，在所有满足

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}, \quad f(z_0) = 0, \quad f \text{ 单全纯}$$

的映射中，选择使 $|f'(z_0)|$ 最大的极值映射。Schwarz 引理给出导数上界，Montel 正规族思想给出极值映射的存在。

第三步，证明极值映射必为满射。若不是满射，漏掉某个点，就可以用圆盘自同构、平方根和 Schwarz 引理构造一个新的单全纯映射，使 $|f'(z_0)|$ 更大，矛盾。

本节证明中使用的复分析标准工具包括 Taylor 展开、恒等定理、全纯反函数定理、Montel 正规族定理和 Hurwitz 定理。为避免打断主线，这些结论统一列在附录 A.1；相关内容可参见 Ahlfors [1] 或 Forster [4]。

注 1.16 (历史与一个典型应用). Riemann 在 1851 年的博士论文中提出了这个定理，原始证明依赖 Dirichlet 原理；后来 Weierstrass 指出这种使用需要补充严格条件。Osgood 在 1900 年给出第一个完整严格证明。Caratheodory 在 1912 年给出函数论证明，并在 1913 年研究边界延拓；这些历史可参见 Ahlfors 与 Forster 的相关叙述。

一个经典而有分量的应用是 Caratheodory 边界延拓定理。这里所谓 Riemann 映射, 是指由 Riemann 映照定理给出的双全纯同构 $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ 。若 Ω 是由 Jordan 曲线围成的单连通区域, 则任一 Riemann 映射 $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ 可以连续延拓到闭圆盘, 并给出闭圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 到 $\overline{\Omega}$ 的同胚。这个结论表述简洁, 但证明需要边界素端或等价的边界理论; 它说明 Riemann 映照定理不仅描述区域内部的复结构, 也能在良好边界条件下控制边界对应。

下面三个事实是 Riemann 映照定理的标准复分析证明中的核心步骤。为了不把正文变成复分析证明细节, 本文只记录其作用并在定理证明中使用。

事实 1.17. 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 为单连通区域, 则存在单的全纯映射 $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ 。

因此证明 Riemann 映照定理时, 可先把 Ω 看成有界单连通区域。取定 $z_0 \in \Omega$, 考虑全纯映射族

$$\mathcal{F} = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ 单射}, f(\Omega) \subset \mathbb{D}, f(z_0) = 0\}.$$

事实 1.18. 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ 单且全纯, $f(z_0) = 0$ 。若 $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$, 则存在 $g \in \mathcal{F}$, 使

$$|g'(z_0)| > |f'(z_0)|.$$

事实 1.19. 存在 $f \in \mathcal{F}$, 使 f 为 Ω 到 $\mathbb{D}$ 的满射。

这些事实属于标准复分析内容; 所需工具见附录 A.1。

定理 1.14 的证明. 由事实 1.17, 存在单全纯映射

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{D}.$$

记 $\Omega_1 = \phi(\Omega)$ 。因为 ϕ 是 Ω 到像区域 Ω_1 的双全纯同构, 证明 Ω 与 $\mathbb{D}$ 双全纯等价, 就等价于证明 Ω_1 与 $\mathbb{D}$ 双全纯等价。于是可把问题化为有界单连通区域 $\Omega_1 \subset \mathbb{D}$ 的情形。

在 Ω_1 中取一点 $w_0 = \phi(z_0)$, 考虑所有满足

$$F: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{D}, \quad F(w_0) = 0, \quad F \text{ 单全纯}$$

的映射。事实 1.19 说明, 其中存在一个极值映射 F , 并且它实际上是满射。于是

$$F: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{D}$$

是单全纯满射。由全纯反函数定理, F^{-1} 在每一点附近全纯, 因此 F 是双全纯同构。

最后把第一步的嵌入映射与这个双全纯映射复合:

$$F \circ \phi: \Omega \rightarrow \mathbb{D}.$$

这里 ϕ 是 Ω 到像区域 Ω_1 的双全纯同构, F 是 Ω_1 到 $\mathbb{D}$ 的双全纯同构, 所以复合 $F \circ \phi$ 是 Ω 到 $\mathbb{D}$ 的双全纯同构。□

2 黎曼曲面、微分形式与亚纯函数

2.1. 黎曼曲面的定义与基本例子

在单复变函数论中，多值函数不能自然地作为平面区域上的单值函数来处理。黎曼曲面的思想是把这些多值现象吸收到空间本身的局部坐标中，使每一点附近仍可使用一元复分析。

定义 2.1 (黎曼曲面). 设 Σ 为具有可数拓扑基的 Hausdorff 拓扑空间。若存在 Σ 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ ，以及每个 U_α 上的连续映射

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C},$$

满足：

1. $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 是 $\mathbb{C}$ 中开集，且 $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ 为同胚；
2. 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ，则转换映射

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

为复平面开集之间的全纯映射，

则称 Σ 为黎曼曲面。

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 称为局部坐标覆盖， U_α 称为坐标邻域， φ_α 称为坐标映射。如无特别说明，本讲义中的黎曼曲面均假定连通。

这里坐标映射本身只要求是到 $\mathbb{C}$ 中开集的同胚；复结构体现在坐标变换是全纯映射。由于交换 α, β 后反向坐标变换也全纯，所以非空交叠上的坐标变换实际是双全纯的。

注 2.2 (黎曼曲面与二维实流形). 黎曼曲面显然是一维复流形。把 $\mathbb{C}$ 看成 $\mathbb{R}^2$ 后，它自然也是二维实光滑流形；但是反过来显然不成立，因为光滑坐标变换并不能保证全纯。

注 2.3 (坐标用语). 本讲义中“局部坐标”“复坐标”“坐标映射”指同一类对象：黎曼曲面上某个开集 U 到 $\mathbb{C}$ 中开集的同胚

$$z : U \rightarrow z(U) \subset \mathbb{C}.$$

若写 $z = x + \sqrt{-1}y$ ，则 x, y 是由 z 的实部和虚部给出的两个实坐标函数。后文说“在坐标 z 中计算”，意思是把对象通过 z 推到平面开集 $z(U)$ 上，再用普通的一元复分析或二维实微积分计算。坐标盘是指 $z(U)$ 为圆盘的坐标邻域。

定义 2.4 (全纯映射与全纯同构). 设 M, N 为黎曼曲面， $f : M \rightarrow N$ 为连续映射。若对任意 $x \in M$ ，存在 x 附近坐标 (U, φ) 与 $f(x)$ 附近坐标 (V, ψ) ，使 $f(U) \subset V$ 且

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

全纯，则称 f 为全纯映射。若存在全纯映射 $f : M \rightarrow N$ 与 $g : N \rightarrow M$ ，使

$$g \circ f = \text{id}_M, \quad f \circ g = \text{id}_N,$$

则称 M 与 N 全纯同构， f 称为双全纯映射。

这个定义与坐标选取无关：若换用另一组源坐标和目标坐标，新的局部表示只是在原来的局部表示左右复合全纯坐标变换，因此仍然全纯。

定义 2.4 中的复合映射

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

称为 f 在坐标 φ, ψ 下的局部表示。它是复平面开集之间的函数。因此，当我们说“全纯映射的局部表示就是一元全纯函数”时，意思就是黎曼曲面上的局部问题可以先选坐标，化成复平面中的一元全纯函数问题。于是事实 1.2 的最大模原理等局部结论可以直接用于黎曼曲面。

推论 2.5 (紧致黎曼曲面上的全纯函数). 设 X 为紧致黎曼曲面， $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯函数，则 f 为常值。

证明. 因为 X 紧致，连续函数 $|f|$ 在 X 上取到最大值。取 $p \in X$ ，使

$$|f(p)| = \max_{q \in X} |f(q)|.$$

选取 p 附近的局部坐标 $z : U \rightarrow z(U) \subset \mathbb{C}$ ，并令

$$F = f \circ z^{-1} : z(U) \rightarrow \mathbb{C}.$$

这正是 f 在源曲面坐标 z 与目标 $\mathbb{C}$ 的恒等坐标下的局部表示，所以 F 是一元全纯函数。

点 $z(p)$ 是 $|F|$ 的局部最大点。由最大模原理， F 在 $z(p)$ 的某个连通小圆盘上为常值，因此 f 在 p 的某个邻域上为常值。

令

$$A = \{q \in X : \text{存在 } q \text{ 的邻域 } V_q, \text{ 使 } f|_{V_q} \equiv f(p)\}.$$

上一步说明 A 非空。由定义 A 是开集：若 $q \in A$ ，则存在邻域 V_q 使 f 在 V_q 上恒等于 $f(p)$ ，于是 V_q 中每一点也都属于 A 。

下面证明 A 也是闭集。取 $q \in \overline{A}$ ，并取 q 附近的连通坐标盘 W 。因为 q 是 A 的闭包点，而 W 是 q 的开邻域，所以 $W \cap A \neq \emptyset$ 。取 $r \in W \cap A$ 。由 $r \in A$ 的定义，存在 r 的邻域 V_r ，使

$$f|_{V_r} \equiv f(p).$$

把 V_r 缩小后可设 $V_r \subset W$ 。在坐标 $z : W \rightarrow z(W) \subset \mathbb{C}$ 下，函数

$$F = f \circ z^{-1} : z(W) \rightarrow \mathbb{C}$$

是一元全纯函数，并且在非空开集 $z(V_r)$ 上恒等于 $f(p)$ 。由一元复分析中的恒等定理， F 在连通区域 $z(W)$ 上恒等于 $f(p)$ 。于是 f 在 W 上恒等于 $f(p)$ ，特别地 $q \in A$ 。

所以 A 非空、既开又闭。由于本文的黎曼曲面假定连通，得到 $A = X$ ，即 $f \equiv f(p)$ 。 $\square$

例 2.6 (平面区域). 复平面中的任意区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 都是黎曼曲面，坐标取恒等映射即可。

下面先回顾商拓扑中会用到的连续性判别。设 $q : X \rightarrow X/\sim$ 为商映射。若 Y 为拓扑空间，则映射

$$F : X/\sim \rightarrow Y$$

连续，当且仅当复合

$$F \circ q : X \rightarrow Y$$

连续。直观地说，商空间上的连续性可以拉回到商映射之前检查。

例 2.7 (复一维投影空间 $\mathbb{CP}^1$). 定义

$$\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\sim,$$

其中

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, (z_0, z_1) = \lambda(w_0, w_1).$$

等价类记为 $[z_0 : z_1]$ ，拓扑取商拓扑。令

$$U_0 = \{[z_0 : z_1] : z_0 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[z_0 : z_1] : z_1 \neq 0\}.$$

坐标映射为

$$\phi_0([z_0 : z_1]) = \frac{z_1}{z_0}, \quad \phi_1([z_0 : z_1]) = \frac{z_0}{z_1}.$$

这些映射是良定义的：若 (z_0, z_1) 同时乘以 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ，比值 z_1/z_0 与 z_0/z_1 不变。以 ϕ_0 为例，它的逆映射为

$$\mathbb{C} \rightarrow U_0, \quad w \mapsto [1 : w],$$

所以 ϕ_0 为双射；同理 $\phi_1^{-1}(w) = [w : 1]$ 。由商拓扑的定义， ϕ_i 及其逆映射连续，因此它们是同胚。在交叠处 $U_0 \cap U_1$ 上，若 $w = \phi_1([z_0 : z_1]) = z_0/z_1$ ，则

$$(\phi_0 \circ \phi_1^{-1})(w) = \phi_0([w : 1]) = \frac{1}{w}.$$

反向转换映射同样为 $w \mapsto 1/w$ 。函数 $w \mapsto 1/w$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上全纯，且它自己的逆仍是自己，所以它是 $\mathbb{C}^*$ 上的全纯同构。因此 $\mathbb{CP}^1$ 是黎曼曲面。

下面也回顾一点紧致化的拓扑。若 X 是非紧的局部紧 Hausdorff 空间，则它的一点紧致化是集合

$$X^* = X \cup \{\infty\}.$$

其中 X 中原来的开集仍然是 X^* 中的开集；含有 ∞ 的开集规定为

$$X^* \setminus K,$$

其中 $K \subset X$ 为紧集。也就是说， ∞ 的邻域是“去掉一个紧集以后剩下的无穷远区域”。

例 2.8 (黎曼球面). 令

$$S = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

并赋予 $\mathbb{C}$ 的一点紧致化拓扑。取

$$U_1 = S \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}, \quad U_2 = S \setminus \{0\},$$

坐标

$$\phi_1(z) = z, \quad \phi_2(z) = \begin{cases} 1/z, & z \neq \infty, \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

交叠处转换映射仍为 $w \mapsto 1/w$ ，与例 2.7 中一样是全纯同构。于是 S 是紧致黎曼曲面，称为黎曼球面。它与例 2.7 中的 $\mathbb{CP}^1$ 全纯同构。

定义 2.9 (格). 复平面中的一个格是由两个实线性无关的复数 ω_1, ω_2 生成的加法子群

$$\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

这里“实线性无关”是指若 $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ 且 $a, b \in \mathbb{R}$ ，则 $a = b = 0$ 。等价地， ω_1, ω_2 作为 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 中的两个向量线性无关。

格是离散的：存在 $\delta > 0$ ，使得任意非零 $\lambda \in \Lambda$ 都满足 $|\lambda| \geq \delta$ 。这是因为线性映射

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (s, t) \mapsto s\omega_1 + t\omega_2$$

是实线性同构，而整数点 (m, n) 在 $\mathbb{R}^2$ 中没有除原点外趋于原点的序列。

例 2.10 (黎曼环面). 设 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ 实线性无关，即 $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ 。记

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

商空间 $\mathbb{C}/\Lambda$ 中点记为 $[z]$ ，商投影记为 $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ 。令

$$\delta = \inf_{(m,n) \neq (0,0)} |m\omega_1 + n\omega_2| > 0.$$

对 $p \in \mathbb{C}/\Lambda$ ，取 $z_p \in \pi^{-1}(p)$ ，令

$$W_p = \{w \in \mathbb{C} : |w - z_p| < \delta/2\}, \quad U_p = \pi(W_p).$$

则 $\pi|_{W_p} : W_p \rightarrow U_p$ 为同胚，其逆给出坐标

$$\phi_p : U_p \rightarrow W_p \subset \mathbb{C}.$$

若 $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ ，取 $x \in U_p \cap U_q$ 。设

$$z = \phi_p(x) \in W_p, \quad z' = \phi_q(x) \in W_q.$$

它们代表同一个商空间点，因此 $z' - z \in \Lambda$ 。由于 W_p 与 W_q 的半径都小于 δ ，在同一个连通交叠分支上这个格点差不能跳变；于是存在固定的 $\lambda \in \Lambda$ ，使

$$z' = z + \lambda.$$

因此坐标变换 $\phi_q \circ \phi_p^{-1}$ 在该分支上形如 $z \mapsto z + \lambda$ ，故为全纯映射。于是 $\mathbb{C}/\Lambda$ 是黎曼曲面，称为黎曼环面。

事实 2.11 (黎曼环面的基本化简). 1. 任给黎曼环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 上一点 p ，存在全纯自同构

$$f_p : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$$

使 $f_p(p) = [0]$ 。

2. 黎曼环面 $\mathbb{C}/\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ 与

$$\mathbb{C}/\langle 1, \omega_1/\omega_2 \rangle, \quad \mathbb{C}/\langle 1, \omega_2/\omega_1 \rangle$$

全纯同构。

这个事实是下面分类结论的准备：第一部分说明环面上的点可以平移到原点，第二部分说明任意格可以归一化为 $\langle 1, \tau \rangle$ 的形式。

事实 2.12 (黎曼环面的分类). 任何黎曼环面均同构于某个

$$\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, \quad \text{Im } \tau > 0.$$

两个这样的黎曼环面 $\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$ 与 $\mathbb{C}/\langle 1, \tau' \rangle$ 全纯同构，当且仅当存在整数 a, b, c, d ，满足

$$ad - bc = 1, \quad \tau = \frac{c + d\tau'}{a + b\tau'}.$$

这个分类定理的证明需要覆盖空间提升以及 $\mathbb{C}$ 的全纯自同构分类，此处仅记录结论。

2.2. 微分形式的语言

本节主要采用微分形式语言来组织概念。核心思想是：黎曼曲面首先是二维实光滑流形，局部复坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$ 给出实坐标 x, y ；切空间、余切空间、楔积、外微分和拉回都可以在这种局部坐标下计算，但最终定义必须与坐标选取无关。

定义 2.13 (光滑函数). 黎曼曲面 M 上的实值或复值函数 f 称为光滑函数, 是指对任意局部复坐标

$$z : U \rightarrow z(U) \subset \mathbb{C},$$

坐标表示

$$f \circ z^{-1} : z(U) \rightarrow \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C}$$

是通常意义下的 C^∞ 函数。这个定义与坐标选取无关, 因为两个复坐标之间的转换映射全纯, 因而作为实二维映射是 C^∞ 的。

定义 2.14 (光滑函数芽与切向量). 设 M 为黎曼曲面, $p \in M$ 。若两个在 p 附近定义的光滑函数在 p 的某个邻域中相等, 则称它们在 p 处有相同的函数芽。记 $C^\infty(p)$ 为 p 附近光滑函数芽所成实向量空间。一个线性映射

$$V_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

若满足 *Leibniz* 规则

$$V_p(fg) = f(p)V_p(g) + g(p)V_p(f),$$

则称 V_p 为 M 在 p 处的切向量。所有切向量构成的实向量空间记为 $T_p M$ 。

若 (U, z) 是 p 附近复坐标, $z = x + \sqrt{-1}y$ 且 $z(p) = 0$, 定义

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_0 (f \circ z^{-1}), \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_0 (f \circ z^{-1}).$$

这两个映射满足 *Leibniz* 规则, 因此是 $T_p M$ 中的切向量。

事实 2.15. $T_p M$ 是二维实向量空间, 且

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \right\}$$

为一组基。

这是把黎曼曲面看成二维实光滑流形后的标准结论。

定义 2.16 (切映射). 设 $\phi : M \rightarrow N$ 为黎曼曲面之间的光滑映射, $p \in M$ 。定义线性映射

$$\phi_{*p} : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$$

为

$$\phi_{*p}(V_p)(g) = V_p(g \circ \phi), \quad g \in C^\infty(\phi(p)).$$

称 ϕ_{*p} 为 ϕ 在 p 处的切映射或微分。

若 $z = x + \sqrt{-1}y$ 是 p 附近坐标, $w = u + \sqrt{-1}v$ 是 $\phi(p)$ 附近坐标, 则 ϕ 的局部表示是复合映射

$$\Phi = w \circ \phi \circ z^{-1} : z(U) \subset \mathbb{C} \rightarrow w(V) \subset \mathbb{C}.$$

把 $\mathbb{C}$ 看成 $\mathbb{R}^2$ 后, 可写

$$\Phi(x, y) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y).$$

这就是一个二元向量值函数

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

因此它在对应坐标基下的切映射矩阵就是 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

命题 2.17. 若 $\phi : M \rightarrow N$ 全纯, 则对任意 $p \in M$, 切映射

$$\phi_{*p} : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$$

要么为零映射, 要么为实线性同构。

证明. 在上述坐标中, ϕ_{*p} 由局部表示 $\Phi = u + \sqrt{-1}v$ 在 $z(p)$ 处的 Jacobi 矩阵给出。若 ϕ 全纯, 则 u, v 满足 Cauchy–Riemann 方程。于是 Jacobi 行列式为

$$u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = |\Phi'(z(p))|^2.$$

若 $\Phi'(z(p)) = 0$, 则切映射为零; 若 $\Phi'(z(p)) \neq 0$, 则 Jacobi 行列式非零, 所以切映射是实线性同构。□

在进入微分形式前, 先回顾对偶空间。若 V 是实向量空间, 它的对偶空间 V^* 是所有线性映射 $V \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的向量空间。若 e_1, e_2 是 V 的一组基, 则对偶基 e^1, e^2 由 $e^i(e_j) = \delta_{ij}$ 定义。

定义 2.18 (微分形式). 余切空间 $T_p^* M$ 是 $T_p M$ 的对偶空间, 其元素称为余切向量。若 $z = x + \sqrt{-1}y$ 为局部坐标, 则 $dx|_p, dy|_p$ 是 $\partial/\partial x|_p, \partial/\partial y|_p$ 的对偶基。 M 上的光滑 1-形式是余切丛 $T^* M$ 的光滑截面。局部地, 对每个 $p \in U$, $\omega_p \in T_p^* M$ 可唯一写成

$$\omega_p = \omega(p) = a(p) dx|_p + b(p) dy|_p,$$

其中 a, b 是 U 上的光滑函数。通常简写为

$$\omega = a dx + b dy.$$

光滑函数称为 0-形式。

注 2.19 (余切丛与截面). 余切丛可以按向量丛的方式理解:

$$T^* M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M, \quad \pi : T^* M \rightarrow M, \quad \pi(\xi_p) = p.$$

在局部坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$ 中, 每个纤维 $T_p^* M$ 都有基 $dx|_p, dy|_p$, 所以 $\pi^{-1}(U)$ 与 $U \times \mathbb{R}^2$ 局部同构。

一个截面就是映射

$$\omega : M \rightarrow T^*M, \quad \pi \circ \omega = \text{id}_M,$$

也就是说, ω 给每个点 p 指定一个余切向量 $\omega(p) \in T_p^*M$ 。从这个角度看, 光滑 1-形式就是余切丛的光滑截面; 这与定义 2.18 中逐点写成 $\omega_p = a(p)dx|_p + b(p)dy|_p$ 的说法一致。

定义 2.20 (函数的外微分). 若 f 是 $U \subset M$ 上的光滑函数, 定义 df 为 U 上的 1-形式:

$$df_p(V_p) = V_p(f), \quad V_p \in T_pM.$$

也就是说, df_p 输入一个切向量, 输出这个切向量作用在函数 f 上得到的实数。在坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$ 中,

$$df = f_x dx + f_y dy.$$

坐标公式的说明. 因为 dx, dy 是 $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ 的对偶基, 任意 1-形式都可写成

$$df = A dx + B dy.$$

分别代入两组基向量得

$$A = df\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial x} = f_x,$$

同理

$$B = df\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f) = \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial y} = f_y.$$

这里 f_x, f_y 表示坐标表示 $f \circ z^{-1}$ 对 x, y 的偏导数。于是

$$df = f_x dx + f_y dy.$$

□

定义 2.21 (楔积与 2-形式). 定义

$$\bigwedge^2 T_p^*M = \{\psi : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} : \psi \text{ 双线性且反对称}\}.$$

若 $\alpha, \beta \in T_p^*M$, 定义

$$(\alpha \wedge \beta)(V, W) = \alpha(V)\beta(W) - \alpha(W)\beta(V).$$

由 $dx|_p, dy|_p$ 是 T_p^*M 的一组基可知, $dx|_p \wedge dy|_p$ 是 $\bigwedge^2 T_p^*M$ 的一组基。这里 $\bigwedge^2 T_p^*M$ 是一维实向量空间, 因为二维向量空间上的反对称双线性形式由它在一组基向量上的取值唯一决定。

M 上的 2-形式是 $\bigwedge^2 T^*M$ 的光滑截面。因此在局部坐标中任意 2-形式都可写为

$$\eta = a dx \wedge dy.$$

命题 2.22 (坐标变换公式). 设 $z = x + \sqrt{-1}y$ 与 $\zeta = u + \sqrt{-1}v$ 是同一开集上的两个局部复坐标。则

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

并且

$$du \wedge dv = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

证明. 由定义 2.20 的坐标公式,

$$du = u_x dx + u_y dy, \quad dv = v_x dx + v_y dy.$$

这正是矩阵公式

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

下面计算楔积。利用双线性,

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= (u_x dx + u_y dy) \wedge (v_x dx + v_y dy) \\ &= u_x v_x dx \wedge dx + u_x v_y dx \wedge dy + u_y v_x dy \wedge dx + u_y v_y dy \wedge dy. \end{aligned}$$

又 $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, 且 $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, 所以

$$du \wedge dv = (u_x v_y - u_y v_x) dx \wedge dy = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

□

定义 2.23 (外微分). 外微分 d 定义如下:

1. 对 0-形式 f , df 如定义 2.20;
2. 对局部 1-形式 $\omega = a dx + b dy$, 定义

$$d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy = (b_x - a_y) dx \wedge dy;$$

3. 对 2-形式 η , 规定 $d\eta = 0$ 。

命题 2.24 (外微分的性质). 外微分满足:

1. d 为 $\mathbb{R}$ -线性算子;
2. 若 ω 为 k -形式, η 为 l -形式, 则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta;$$

3. $d^2 = 0$ 。

证明. 线性由定义直接得到。比如对函数有

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg,$$

对 1-形式 $\omega = a dx + b dy$ 也有

$$d(\lambda \omega + \mu \eta) = \lambda d\omega + \mu d\eta,$$

因为系数函数的偏导数是线性的。2-形式情形由定义 $d\eta = 0$ 立即得到。

下面验证 $d^2 = 0$ 。对 0-形式 f ,

$$d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = (f_{yx} - f_{xy}) dx \wedge dy = 0.$$

对 1-形式 $\omega = a dx + b dy$, $d\omega$ 是 2-形式, 而 2-形式的外微分按定义为 0, 所以 $d(d\omega) = 0$ 。对 2-形式同理。

最后验证 Leibniz 公式。若 f 是函数、 $\omega = a dx + b dy$ 是 1-形式, 则

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= d(fa dx + fb dy) \\ &= [(fb)_x - (fa)_y] dx \wedge dy \\ &= (f_x b + f b_x - f_y a - f a_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

另一方面,

$$df \wedge \omega + f d\omega = (f_x dx + f_y dy) \wedge (a dx + b dy) + f(b_x - a_y) dx \wedge dy,$$

右端化简为同一个表达式。函数与函数、函数与 2-形式、1-形式与 1-形式等其他情形完全同理, 都是代入局部表达式并使用楔积反交换性。□

定义 2.25 (拉回). 设 $F : M \rightarrow N$ 为光滑映射。记 $\Omega^q(M)$ 为 M 上光滑 q -形式全体。对函数, 拉回给出映射

$$F^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M), \quad g \mapsto F^*g,$$

其中

$$F^*g = g \circ F.$$

也就是说, 先由 $p \in M$ 经过 F 到 $F(p) \in N$, 再把 g 作用在 $F(p)$ 上。

对 1-形式, 拉回给出映射

$$F^* : \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M), \quad \omega \mapsto F^*\omega.$$

它在点 $p \in M$ 处定义为

$$(F^*\omega)_p(V_p) = \omega_{F(p)}(F_{*p}V_p).$$

这里切映射

$$F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

先把 M 上的切向量推到 N 上, 然后让 ω 作用。

对 2-形式, 拉回给出映射

$$F^* : \Omega^2(N) \rightarrow \Omega^2(M), \quad \eta \mapsto F^*\eta,$$

并在点 p 处定义为

$$(F^*\eta)_p(V_p, W_p) = \eta_{F(p)}(F_{*p}V_p, F_{*p}W_p).$$

定义 2.26 (de Rham 上同调). 若 $d\omega = 0$, 称 ω 为闭形式; 若存在 η 使 $\omega = d\eta$, 称 ω 为恰当形式。黎曼曲面 M 的 q 次 de Rham 上同调群定义为

$$H_{\text{dR}}^q(M) = \frac{\{q \text{ 次闭形式}\}}{\{q \text{ 次恰当形式}\}}, \quad q = 0, 1, 2.$$

定理 2.27 (Poincaré 引理).

$$H_{\text{dR}}^q(\mathbb{C}) = 0, \quad q = 1, 2.$$

也就是说, $\mathbb{C}$ 上的闭形式必为恰当形式。同样的证明适用于 $\mathbb{C}$ 中的凸域, 特别地 $H_{\text{dR}}^q(\mathbb{D}) = 0$, $q = 1, 2$ 。

证明. 设 $z = x + \sqrt{-1}y$ 为标准坐标。

若 ω 为 2-形式, 写 $\omega = F(x, y) dx \wedge dy$ 。令

$$\eta = G(x, y) dy, \quad G(x, y) = \int_0^x F(t, y) dt.$$

按照定义 2.23,

$$d\eta = d(G dy) = dG \wedge dy.$$

而

$$dG = G_x dx + G_y dy.$$

因此

$$d\eta = (G_x dx + G_y dy) \wedge dy = G_x dx \wedge dy + G_y dy \wedge dy = G_x dx \wedge dy.$$

由微积分基本定理, $G_x = F(x, y)$, 所以 $d\eta = F dx \wedge dy = \omega$ 。

若 ω 为 1-形式, 写 $\omega = P dx + Q dy$ 。闭性 $d\omega = 0$ 等价于

$$P_y = Q_x.$$

令

$$f(x, y) = \int_0^x P(t, y) dt + \int_0^y Q(0, s) ds.$$

首先,

$$f_x(x, y) = P(x, y),$$

因为第二项与 x 无关。其次,

$$f_y = \int_0^x P_y(t, y) dt + Q(0, y) = \int_0^x Q_x(t, y) dt + Q(0, y) = Q(x, y).$$

其中第二个等号使用闭性 $P_y = Q_x$, 最后一个等号使用微积分基本定理。于是

$$df = f_x dx + f_y dy = P dx + Q dy = \omega.$$

□

由此, 第一章中调和共轭局部存在性所需要的 Poincare 引理证明已经补齐。

定义 2.28 (积分). 设 ω 为 M 上 1-形式, $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ 为光滑曲线。这里 σ 是曲线的参数化; 当曲线是区域边界时, 也可以理解为对边界选取一个参数化。若在坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$ 中 $\omega = A dx + B dy$, 定义

$$\int_{\sigma} \omega = \int_a^b \left((A \circ \sigma)(t) \frac{d(x \circ \sigma)}{dt} + (B \circ \sigma)(t) \frac{d(y \circ \sigma)}{dt} \right) dt.$$

通常把 $(A \circ \sigma)(t)$ 简写为 $A(\sigma(t))$, 把 $(B \circ \sigma)(t)$ 简写为 $B(\sigma(t))$ 。

若 η 为紧支撑在一个坐标邻域中的 2-形式, $\eta = A dx \wedge dy$, 定义

$$\int_{\Omega} \eta = \int_{z(\Omega)} (A \circ z^{-1})(x, y) dx dy.$$

后文常把 $A \circ z^{-1}$ 仍简写为 $A(x, y)$ 。这个定义目前是局部的。

事实 2.29 (光滑单位分解). 设 M 为第二可数 Hausdorff 光滑流形, $\{U_{\alpha}\}$ 为开覆盖。则存在一族非负光滑函数 $\{\rho_j\}$, 满足:

1. 每个 ρ_j 的支集包含在某个 U_{α} 中;
2. $\{\text{supp } \rho_j\}$ 局部有限;
3. 对所有 $p \in M$, 有 $\sum_j \rho_j(p) = 1$ 。

利用单位分解, 可以把 2-形式的局部积分推广到全局。取一个坐标邻域覆盖, 并取从属于它的单位分解 $\{\rho_j\}$ 。对一般紧支撑 2-形式 η , 每个 $\rho_j \eta$ 都支撑在某个坐标邻域中, 因此已经有局部积分定义。规定

$$\int_M \eta = \sum_j \int_M \rho_j \eta.$$

由于单位分解局部有限且 η 紧支撑, 实际只有有限多项非零。标准论证说明这个定义与单位分解的选取无关。

定理 2.30 (Stokes 公式). 设 M 为黎曼曲面, $\Omega \Subset M$ 为边界分段光滑的区域, ω 为 $\overline{\Omega}$ 的一个邻域上的光滑 1-形式。则

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

证明略去。完整证明需要先在坐标邻域中化为平面上的 Green 公式，再借助单位分解把局部公式粘合成全局公式。

定理 2.31.

$$H_{\text{dR}}^1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{R}.$$

同理， $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{D}^*) \cong \mathbb{R}$ 。

证明. 定义

$$\Phi : H_{\text{dR}}^1(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_{S^1} \omega.$$

若把 ω 改成同一个上同调类中的另一个代表，即改成 $\omega + dh$ ，则

$$\int_{S^1} (\omega + dh) = \int_{S^1} \omega + \int_{S^1} dh = \int_{S^1} \omega,$$

因为闭曲线上恰当形式的积分为零。故 Φ 定义良好。

在极坐标中， θ 本身不是 $\mathbb{C}^*$ 上的单值函数，但

$$d\theta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

是 $\mathbb{C}^*$ 上定义良好的 1-形式。直接计算得 $d(d\theta) = 0$ ，并且沿单位圆周

$$S^1 : \theta \mapsto e^{\sqrt{-1}\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

有

$$\int_{S^1} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

因此 $\Phi([d\theta/(2\pi)]) = 1$ ，从而 Φ 满。

若 ω 闭且 $\int_{S^1} \omega = 0$ ，写

$$\omega = f dr + g d\theta.$$

这里 f, g 是关于 (r, θ) 的 2π -周期光滑函数。由

$$d\omega = d(f dr) + d(g d\theta) = f_\theta d\theta \wedge dr + g_r dr \wedge d\theta = (g_r - f_\theta) dr \wedge d\theta$$

和 $d\omega = 0$ ，得到

$$f_\theta = g_r.$$

令

$$H_1(r, \theta) = \int_1^r f(t, \theta) dt.$$

则

$$dH_1 = f(r, \theta) dr + \left(\int_1^r f_\theta(t, \theta) dt \right) d\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}\omega - dH_1 &= \left(g(r, \theta) - \int_1^r f_\theta(t, \theta) dt \right) d\theta \\ &= \left(g(r, \theta) - \int_1^r g_r(t, \theta) dt \right) d\theta \\ &= g(1, \theta) d\theta.\end{aligned}$$

又

$$0 = \int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} g(1, \theta) d\theta.$$

所以

$$H_2(\theta) = \int_0^\theta g(1, s) ds$$

满足 $H_2(\theta + 2\pi) = H_2(\theta)$ ，从而是圆周上的单值函数。令

$$H(r, \theta) = H_1(r, \theta) + H_2(\theta).$$

则 $dH = \omega$ ，故 $\ker \Phi = 0$ 。于是 Φ 为同构。

$\mathbb{D}^*$ 与 $\mathbb{C}^*$ 的证明完全相同，只需把 r 的范围限制为 $0 < r < 1$ 。

□

定理 2.32 (单连通曲面上的闭 1-形式). 设 M 为单连通黎曼曲面，则

$$H_{\text{dR}}^1(M) = 0.$$

证明. 设 ω 为 M 上闭 1-形式。固定 $p_0 \in M$ 。对 $p \in M$ ，取从 p_0 到 p 的光滑曲线 γ_p ，令

$$f(p) = \int_{\gamma_p} \omega.$$

先说明这个定义与路径选取无关。若 σ_p 是另一条从 p_0 到 p 的光滑曲线，则把 γ_p 与反向的 σ_p 拼起来得到一条闭曲线。由于 M 单连通，这条闭曲线同伦于常值曲线。等价地，可取一个分段光滑映射

$$H : [0, 1]^2 \rightarrow M$$

使边界对应这条闭曲线及若干退化边。由 Stokes 公式 2.30，

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_p} \omega - \int_{\sigma_p} \omega &= \int_{\partial[0,1]^2} H^* \omega \\ &= \int_{[0,1]^2} d(H^* \omega) \\ &= \int_{[0,1]^2} H^*(d\omega) = 0.\end{aligned}$$

因此 f 定义良好。

最后验证 $df = \omega$ 。取 $q \in M$ 及其一个坐标圆盘 W , 坐标为 (x, y) , 并在 W 中写

$$\omega = A dx + B dy.$$

对 W 中靠近 q 的点 r , 可以把从 p_0 到 r 的路径取成: 先沿固定路径从 p_0 到 q , 再在坐标圆盘 W 中从 q 到 r 。因此在 W 上, f 与局部函数

$$h(r) = \int_q^r \omega$$

只相差一个常数。由于 W 是坐标圆盘, Poincare 引理的局部计算给出 $dh = \omega$ 。于是 $df|_W = dh = \omega$ 。点 q 任意, 故 $df = \omega$, 从而 ω 恰当。□

定义 2.33 (复化、复系数形式与类型分解). 若 V 是实向量空间, 它的复化是

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

张量积与这个记号的严格含义见附录 A.3。在本讲义中, 可以把 $V_{\mathbb{C}}$ 的元素唯一写成 $X + \sqrt{-1}Y$, 其中 $X, Y \in V$, 并允许复数作标量。把每个切空间 $T_p M$ 与余切空间 $T_p^* M$ 复化后, 就得到复切向量和复系数微分形式。

若 $z = x + \sqrt{-1}y$, 定义

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$dz = dx + \sqrt{-1}dy, \quad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy.$$

则

$$dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 1, \quad d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 1, \quad dz \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0.$$

1-形式若局部形如 $a dz$, 称为 $(1, 0)$ 型; 若局部形如 $b d\bar{z}$, 称为 $(0, 1)$ 型。2-形式也称为 $(1, 1)$ 型。

常用公式为

$$dx \wedge dy = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

函数 f 全纯当且仅当 $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ 。

定义 2.34 (∂ 与 $\bar{\partial}$). 对函数 f , 定义

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

若 $\omega = a dz + b d\bar{z}$, 定义

$$\partial \omega = \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}, \quad \bar{\partial} \omega = \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz.$$

对 2-形式, 规定 $\partial \omega = \bar{\partial} \omega = 0$ 。

事实 2.35. 有如下恒等式：

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0, \quad \bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}.$$

2.3. 亚纯函数与分歧

本节研究黎曼曲面之间全纯映射的局部标准形，以及值域为黎曼球面时得到的亚纯函数。由于分歧的定义依赖覆盖映射，先给出拓扑定义。

定义 2.36 (覆盖映射). 设 $p : E \rightarrow B$ 为连续满射。若对任意 $b \in B$ ，存在开邻域 V ，使

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

为互不相交开集的并，且每个限制

$$p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$$

都是同胚，则称 p 为覆盖映射， V 称为均匀覆盖邻域。若每个纤维含 n 个点，则称为 n 叶覆盖。

例 2.37 (幂映射). 设 k 为正整数，考虑

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad f(z) = z^k.$$

当 $z_0 \neq 0$ 时， $f'(z_0) = kz_0^{k-1} \neq 0$ 。由反函数定理， f 在 z_0 的某个小邻域上是一一的，并且反函数全纯。

当 $z_0 = 0$ 时，考虑

$$f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*.$$

映射 $z \mapsto z^k$ 在 $\mathbb{D}^*$ 上是 k 叶覆盖。也就是说，任意 $a \in \mathbb{D}^*$ 附近都有小邻域 V ，使 $f^{-1}(V)$ 分成 k 个互不相交的开集，并且每一支都同胚到 V 。原点是分歧点， k 是它的重数。

定义 2.38 (分歧覆盖). 设 $f : X \rightarrow Y$ 为拓扑空间之间的连续映射。若对任意 $p \in X$ ，存在 p 的邻域 U ，使

$$f : U \setminus \{p\} \rightarrow f(U) \setminus \{f(p)\}$$

是有限叶覆盖映射，则称 f 为分歧覆盖。该覆盖的叶数称为 p 处的重数，也称 p 覆盖 $f(p)$ 的次数。

命题 2.39 (全纯映射的局部标准形). 设 $F : X \rightarrow Y$ 为黎曼曲面之间的非常值全纯映射， $p \in X$ ， $q = F(p)$ 。则存在 p 附近坐标 z 与 q 附近坐标 w ，满足 $z(p) = 0, w(q) = 0$ ，并且

$$w \circ F = z^k$$

对某个整数 $k \geq 1$ 成立。整数 k 称为 F 在 p 处的重数或分歧指数。

这个命题的证明用到零点阶数、局部全纯开根和反函数定理，作为标准复分析结论使用。

推论 2.40. 黎曼曲面之间的非常值全纯映射是分枝覆盖。

证明. 取任意 $p \in X$, 令 $q = F(p)$ 。由命题 2.39, 可取 p 附近坐标

$$z : U \rightarrow \mathbb{D}, \quad z(p) = 0,$$

和 q 附近坐标

$$w : V \rightarrow \mathbb{D}, \quad w(q) = 0,$$

使得在缩小 U, V 后有 $F(U) \subset V$, 并且局部表示为

$$w \circ F \circ z^{-1}(\zeta) = \zeta^k.$$

这里等式右边才是通常写作 z^k 的局部表达。

在去掉中心点后, 幂映射

$$\mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*, \quad z \mapsto z^k$$

由例 2.37 可知是 k 叶覆盖。具体地, 取小圆盘 $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}$, 令

$$U_r = z^{-1}(\mathbb{D}_r), \quad V_r = w^{-1}(\mathbb{D}_{r^k}).$$

则

$$F : U_r \setminus \{p\} \rightarrow V_r \setminus \{q\}$$

在坐标 z, w 下正好对应 $z \mapsto z^k$ 。由于覆盖映射在同胚复合下仍是覆盖映射, 上式是有限叶覆盖。因此 F 是分枝覆盖。 $\square$

定义 2.41 (含重数的原像个数). 设 $F : M \rightarrow N$ 为全纯映射, $q \in N$ 。定义

$$\#F^{-1}(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} e_p(F),$$

其中 $e_p(F)$ 为 F 在 p 处的重数。称其为 q 在 F 下原像的个数。

定义 2.42 (亚纯函数). 设 M 为黎曼曲面。满足 $f \neq \infty$ 的全纯映射

$$f : M \rightarrow S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

称为 M 上的亚纯函数。若 $f(p) = \infty$, 称 p 为 f 的极点; 若 $f(p) = 0$, 称 p 为 f 的零点。

当 $M = \Omega \subset \mathbb{C}$ 时, 这与通常单复变中的定义一致。一方面, 若 $f : \Omega \rightarrow S$ 是上述意义的亚纯函数, 且 $f(p) \neq \infty$, 则在 p 附近它就是普通全纯函数; 若 $f(p) = \infty$, 取黎曼球面无穷远点附近坐标 $\zeta = 1/w$, 则

$$\zeta \circ f = \frac{1}{f}$$

在 p 附近全纯且取值为 0, 所以 f 在 p 处是通常意义下的极点。另一方面, 若单复变意义下的亚纯函数只具有孤立极点, 则在极点处把函数值定义为 ∞ ; 用无穷远坐标 $\zeta = 1/w$ 看, $\zeta \circ f = 1/f$ 在极点处全纯, 因此得到黎曼球面的全纯映射。

定义 2.43 (Laurent 展开与主部). 设 $a \in \mathbb{C}$, 函数 f 在穿孔圆盘 $0 < |z - a| < r$ 上全纯。若存在整数 $m \geq 0$ 与复数 $c_{-m}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots$, 使

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

在 $0 < |z - a| < r$ 中成立, 则称这是 f 在 a 附近的 Laurent 展开。若 $m > 0$ 且 $c_{-m} \neq 0$, 则 a 是 f 的 m 阶极点。

有限和

$$c_{-m}(z - a)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - a)^{-1}$$

称为 Laurent 展开的主部。它也可写成

$$P_a\left(\frac{1}{z - a}\right),$$

其中 $P_a(T) = c_{-m}T^m + \dots + c_{-1}T$ 是一个没有常数项的多项式。

事实 2.44 (全纯函数与亚纯函数的局部展开). 单复变中, 全纯函数在每一点附近有 Taylor 展开; 亚纯函数在极点附近一般不能作 Taylor 展开, 但可以作 Laurent 展开, 并且其负幂部分只有有限项。

定义 2.45 (亚纯函数域与赋值). 黎曼曲面 M 上亚纯函数全体在通常加法、乘法和除法下构成一个域, 记为 $\mathcal{M}(M)$ 。设 $f \in \mathcal{M}(M)$, $f \neq 0$ 。取 p 附近坐标 z , $z(p) = 0$, 则

$$(f \circ z^{-1})(\zeta) = a_n \zeta^n + a_{n+1} \zeta^{n+1} + \dots, \quad n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0.$$

这里 z^{-1} 把坐标平面中的小圆盘送回 M 上 p 的邻域, 所以 $f \circ z^{-1}$ 是 f 在坐标 z 下的局部表示。称 n 为 f 在 p 处的赋值, 记为 $v_p(f)$ 。若 $n < 0$, 则 p 称为极点; 若 $n > 0$, 则 p 称为零点。规定 $v_p(0) = \infty$ 。

这里之所以能写出上述展开, 是因为 f 是亚纯函数, 所以 $f \circ z^{-1}$ 是一个单复变亚纯函数; 由事实 2.44, 它在 $\zeta = 0$ 附近有有限主部 Laurent 展开。取其中第一个非零项, 就得到上式。

命题 2.46. 赋值满足:

$$v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g), \quad v_p(f + g) \geq \min\{v_p(f), v_p(g)\}.$$

证明. 只证明前两个性质。取 p 附近坐标 z , 并把局部表示简写为

$$f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots, \quad a_m \neq 0,$$

$$g(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \dots, \quad b_n \neq 0.$$

则

$$f(z)g(z) = a_m b_n z^{m+n} + \text{更高次项},$$

且 $a_m b_n \neq 0$, 所以

$$v_p(fg) = m + n = v_p(f) + v_p(g).$$

再看和。若 $m < n$, 则

$$f(z) + g(z) = a_m z^m + \text{更高次项},$$

所以 $v_p(f+g) = m = \min\{m, n\}$ 。若 $n < m$, 同理得到 $v_p(f+g) = n$ 。若 $m = n$, 则

$$f(z) + g(z) = (a_m + b_m)z^m + \text{更高次项}.$$

如果 $a_m + b_m \neq 0$, 则 $v_p(f+g) = m$; 如果 $a_m + b_m = 0$, 最低次项发生抵消, 赋值只能变大, 或者 $f+g=0$, 此时按约定 $v_p(0) = \infty$ 。因此总有

$$v_p(f+g) \geq \min\{v_p(f), v_p(g)\}.$$

□

回顾定义 2.18, 黎曼表面上的光滑 1-形式在局部坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$ 中可写为

$$\omega = A dx + B dy.$$

复化以后, 也可用

$$dz = dx + \sqrt{-1}dy, \quad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy$$

作基。所谓 $(1,0)$ 型, 就是局部可以写成

$$\omega = f(z) dz$$

的复系数 1-形式。

定义 2.47 (全纯微分). 黎曼曲面 M 上闭的 $(1,0)$ 型 1-形式称为全纯微分。全纯微分全体记为 $H(M)$ 。局部地, 全纯微分可写为

$$\omega = f(z) dz,$$

其中 f 为全纯函数。

这里 f 的全纯性来自“闭”这个条件。一般的 $(1,0)$ 型光滑 1-形式只能写成 $f(z) dz$, 其中 f 是光滑函数。若再要求 $d(f dz) = 0$, 则

$$df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z},$$

于是

$$d(f dz) = df \wedge dz = (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}) \wedge dz = f_{\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz.$$

因为 $d\bar{z} \wedge dz$ 是局部非零的 2-形式, 所以 $d(f dz) = 0$ 等价于

$$f_{\bar{z}} = 0.$$

这正是 Cauchy–Riemann 方程, 因此 f 全纯。

定义 2.48 (亚纯微分). 黎曼曲面 M 上的亚纯微分, 是指在 M 去掉某个离散子集后定义的全纯微分, 并且其局部表示的系数为局部亚纯函数。亚纯微分全体记为 $K(M)$ 。若在 p 附近

$$\omega = f(z) dz,$$

则定义 $v_p(\omega) = v_p(f)$ 。

这里 M 去掉离散子集后仍是黎曼曲面: 它是 M 的开子集, 继承原来的局部坐标和全纯坐标变换。

定义 2.49 (留数). 设 ω 为 M 上亚纯微分。取 p 附近坐标 z , $z(p) = 0$, 并写

$$\omega = (a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \cdots + a_{-1}z^{-1} + b(z)) dz,$$

其中 b 全纯。称 a_{-1} 为 ω 在 p 处的留数, 记为 $\text{Res}_p(\omega)$ 。

因为 ω 是亚纯微分, 它在局部可写为 $f(z) dz$, 其中 f 是亚纯函数。由事实 2.44, f 在 $z = 0$ 附近有有限主部 Laurent 展开, 所以 ω 可以写成定义中的形式。

此时我们还没有证明留数定义与坐标选取无关。下面先证明留数可以由小圆周积分给出, 再用这个积分表达式推出坐标无关性。

命题 2.50 (留数积分公式). 取以 p 为中心的小坐标圆盘 B , 其边界取正向。则

$$\int_{\partial B} \omega = 2\pi\sqrt{-1} a_{-1}.$$

证明. 在坐标 z 中设 $B = \{|z| < r\}$, 并写

$$\omega = \left(\sum_{j=-n}^{\infty} a_j z^j \right) dz.$$

Laurent 级数在圆周 $|z| = r$ 上一致收敛, 因此可以逐项积分。沿 ∂B 作参数化

$$z(t) = re^{\sqrt{-1}t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

则

$$dz = \sqrt{-1}re^{\sqrt{-1}t} dt.$$

对 $j \neq -1$,

$$\int_{\partial B} z^j dz = \int_0^{2\pi} r^j e^{\sqrt{-1}jt} \sqrt{-1}re^{\sqrt{-1}t} dt = \sqrt{-1}r^{j+1} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}(j+1)t} dt = 0.$$

而

$$\int_{\partial B} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \sqrt{-1} dt = 2\pi\sqrt{-1}.$$

逐项积分得到

$$\int_{\partial B} \omega = 2\pi\sqrt{-1} a_{-1}.$$

□

由命题 2.50 可知, 留数也可写成

$$\operatorname{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial B} \omega.$$

先说明这个积分与小圆的半径无关。若 $B_2 \Subset B_1$ 是两个以 p 为中心的小坐标圆盘, 则在环域

$$A = B_1 \setminus \overline{B_2}$$

上 ω 全纯, 因此 $d\omega = 0$ 。注意 A 的边界取向为

$$\partial A = \partial B_1 - \partial B_2,$$

其中 $\partial B_1, \partial B_2$ 都按各自圆盘的正向记号书写。由 Stokes 公式,

$$\int_{\partial B_1} \omega - \int_{\partial B_2} \omega = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = 0.$$

所以积分与半径的选取无关。

再说明它与局部坐标选取无关。设 z, w 是 p 附近的两个局部坐标, 且 $z(p) = w(p) = 0$ 。在 z 坐标下先取足够小的圆周

$$\gamma_z = \{|z| = r\},$$

使其围出的闭圆盘仍在两个坐标邻域的交中。再把 ρ 取得足够小, 使得 w 坐标圆周

$$\gamma_w = \{|w| = \rho\}.$$

位于 γ_z 围出的圆盘内部。于是 γ_z 与 γ_w 共同围成一个不含 p 的环形区域 A' 。在 A' 上 ω 全纯, 所以 $d\omega = 0$ 。由 Stokes 公式,

$$0 = \int_{A'} d\omega = \int_{\partial A'} \omega = \int_{\gamma_z} \omega - \int_{\gamma_w} \omega,$$

其中符号只反映两个边界分量的相反取向。因此两种坐标下的小圆积分相同。命题 2.50 又说明这两个积分分别等于 $2\pi\sqrt{-1}$ 乘以对应 Laurent 展开中的 $z^{-1}dz$ 系数和 $w^{-1}dw$ 系数, 故这两个系数相同。于是 $\operatorname{Res}_p(\omega)$ 与坐标选取无关。

定理 2.51 (留数定理). 设 M 为紧致黎曼曲面, ω 为 M 上亚纯微分。则

$$\sum_{p \in M} \operatorname{Res}_p(\omega) = 0.$$

证明. 先说明极点只有有限个。亚纯微分的极点是孤立点; 若极点有无限多个, 则由 M 的紧致性可取一个收敛子列, 其极限点仍在 M 中, 这与极点孤立矛盾。因此非零亚纯微分的极点在紧致曲面中只有有限个, 记为 $p_1, \dots, p_k$ 。对每个 p_j , 取足够小的坐标圆盘 B_j , 使得 $\overline{B_j}$ 两两不交, 并且 B_j 中除 p_j 外不含其他极点。令

$$\Omega = M \setminus \bigcup_j B_j.$$

在 Ω 上 ω 全纯。也就是说，局部可写为

$$\omega = f(z) dz,$$

其中 f 全纯。按外微分定义，

$$d\omega = d(f dz) = df \wedge dz.$$

又

$$df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z},$$

且 f 全纯给出 $f_{\bar{z}} = 0$ ，所以

$$d\omega = f_z dz \wedge dz = 0.$$

现在 Ω 是一个带边界的紧致曲面。若 ∂B_j 表示作为圆盘边界的正向取向，则作为 Ω 的边界分量时取向相反，因此

$$\partial\Omega = - \sum_{j=1}^k \partial B_j.$$

因此可以使用 Stokes 公式：

$$0 = \int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega = - \sum_j \int_{\partial B_j} \omega = -2\pi\sqrt{-1} \sum_j \text{Res}_{p_j}(\omega).$$

结论成立。 □

推论 2.52 (零点数等于极点数). 设 M 为紧致黎曼曲面， $f : M \rightarrow S$ 为非常值亚纯函数。则：

1. f 的零点个数与极点个数相等，均按重数计算；
2. 对任意 $a \in S$ ， $\#f^{-1}(a)$ 为与 a 无关的常数。特别地， f 为满射。

证明. 先证明 (1)。对亚纯微分

$$\omega = \frac{df}{f}$$

应用留数定理 2.51。先说明这是亚纯微分。在局部坐标 z 中， f 是亚纯函数，因此 $df = f'(z) dz$ ，所以

$$\frac{df}{f} = \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

的系数是亚纯函数。

在 p 附近取局部坐标 z 。若 $v_p(f) = m$ ，则可写

$$f(z) = z^m u(z), \quad u(0) \neq 0,$$

其中 u 在 p 附近全纯且无零点。注意 m 可以为正、负或零。对两边取外微分：

$$df = d(z^m u).$$

由乘法法则,

$$df = d(z^m)u + z^m du.$$

又

$$d(z^m) = mz^{m-1}dz,$$

所以

$$df = mz^{m-1}u dz + z^m du.$$

除以 $f = z^m u$, 得到

$$\frac{df}{f} = m \frac{dz}{z} + \frac{du}{u},$$

其中

$$\frac{du}{u} = \frac{u'(z)}{u(z)} dz.$$

因为 $u(0) \neq 0$, 缩小邻域后 u 无零点, 所以 $u'(z)/u(z)$ 全纯。因此 du/u 的 Laurent 展开中没有 $z^{-1}dz$ 项, 留数为 0。又

$$\text{Res}_p \left(m \frac{dz}{z} \right) = m.$$

因此

$$\text{Res}_p \left(\frac{df}{f} \right) = m = v_p(f).$$

留数定理给出

$$\sum_{p \in M} v_p(f) = 0.$$

正赋值之和就是零点数, 负赋值绝对值之和就是极点数, 因此二者相等。

再证明 (2)。先取 $a \in \mathbb{C}$ 。函数 $f - a$ 的零点正是 $f^{-1}(a)$ 。若 $p \in f^{-1}(a)$, 取 p 附近坐标 z , 则

$$(f - a) \circ z^{-1}(\zeta) = c_m \zeta^m + c_{m+1} \zeta^{m+1} + \cdots, \quad c_m \neq 0.$$

这里的 m 就是 $f - a$ 在 p 处的零点阶数; 同时, 在目标球面 a 附近取坐标 $w - a$, 映射 f 的局部表示也正是 $(f - a) \circ z^{-1}$, 所以 m 就是 f 在 p 处取值 a 的局部重数。

另一方面, $f - a$ 与 f 有相同的极点, 并且极点阶数相同。确切地说, 若 p 是 f 的极点, 局部写

$$f \circ z^{-1}(\zeta) = c_{-m} \zeta^{-m} + c_{-m+1} \zeta^{-m+1} + \cdots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

则

$$(f - a) \circ z^{-1}(\zeta) = c_{-m} \zeta^{-m} + c_{-m+1} \zeta^{-m+1} + \cdots + (c_0 - a) + \cdots,$$

最低负幂项没有改变, 所以极点阶数仍为 m 。因此由 (1),

$$\#f^{-1}(a) = \#f^{-1}(\infty).$$

当 $a = \infty$ 时等式平凡成立。于是 $\#f^{-1}(a)$ 与 $a \in S$ 无关。

最后说明 f 满射。若某个 $a \in S$ 没有原像, 则 $\#f^{-1}(a) = 0$, 由刚才的常数性知每个纤维的计重数原像

个数都为 0。但 M 非空，任取 $p \in M$ ，点 $f(p)$ 至少有一个原像 p ，矛盾。因此 f 为满射。 $\square$

推论 2.53 (代数基本定理). 任意非常数复多项式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

在 $\mathbb{C}$ 中恰有 n 个零点，按重数计算。

证明. 把 P 看成黎曼球面 S 上的亚纯函数，并定义 $P(\infty) = \infty$ 。它在有限平面 $\mathbb{C}$ 中是全纯函数，所以没有极点；唯一可能的极点在 ∞ 。

严格地说，要看 P 在 ∞ 附近的局部表示，应同时取源和目标的无穷远坐标。令

$$\varphi : S \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \quad \varphi(\infty) = 0,$$

为源球面在 ∞ 附近的坐标；令

$$\psi : S \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(\eta) = \frac{1}{\eta}, \quad \psi(\infty) = 0,$$

为目标球面在 ∞ 附近的坐标。若 $w = \varphi(\zeta)$ ，则 $\varphi^{-1}(w) = 1/w$ 。作为普通复值表达，

$$P(1/w) = a_n w^{-n} + a_{n-1} w^{-(n-1)} + \cdots + a_0 = w^{-n} (a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n).$$

括号中的函数

$$u(w) = a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n$$

在 $w = 0$ 处全纯且 $u(0) = a_n \neq 0$ 。这说明普通表达 $P \circ \varphi^{-1}$ 在 $w = 0$ 处有 n 阶极点。等价地，作为到黎曼球面的映射，其严格局部表示为

$$(\psi \circ P \circ \varphi^{-1})(w) = \frac{1}{P(1/w)} = \frac{w^n}{u(w)}.$$

因为 $1/u(w)$ 在 0 附近全纯且非零，所以这个局部表示在 $w = 0$ 有 n 阶零点。换回原来的说法， ∞ 是 P 的 n 阶极点。因此

$$\#P^{-1}(\infty) = n.$$

由推论 2.52，

$$\#P^{-1}(0) = \#P^{-1}(\infty) = n.$$

这就是说 P 在 $\mathbb{C}$ 中恰有 n 个零点，按重数计算。 $\square$

3 Hodge 定理

本章先保留紧致黎曼曲面上因子的基本语言。

3.1. 因子

在本节中，除非特别说明， M 总表示一个紧致黎曼曲面。这里的因子就是代数几何中常说的除子；在黎曼曲面上，它可以看成对每个点赋予一个整数，只允许有限多个点的整数非零。

定义 3.1 (因子). 设 M 为黎曼曲面。一个因子是一个映射

$$D : M \rightarrow \mathbb{Z}$$

且除有限多个点 $p \in M$ 外都有 $D(p) = 0$ 。也就是说，给定 $p \in M$ ，因子 D 在 p 上的取值是一个整数 $D(p)$ 。通常把它写成形式和

$$D = \sum_{p \in M} D(p) p.$$

这里虽然写成对所有 $p \in M$ 求和，但由于只有有限多个 $D(p)$ 非零，实际含义是有限和

$$D = \sum_{p \in \text{supp } D} D(p) p, \quad \text{supp } D = \{p \in M : D(p) \neq 0\}.$$

若对所有 $p \in M$ 都有 $D(p) \geq 0$ ，则称 D 为有效因子，记为 $D \geq 0$ 。

所有因子在逐点加法下构成交换群，记为 $\text{Div}(M)$ 。若

$$D_1 = \sum_p D_1(p) p, \quad D_2 = \sum_p D_2(p) p,$$

则

$$D_1 + D_2 = \sum_p (D_1(p) + D_2(p)) p, \quad D_1 - D_2 = \sum_p (D_1(p) - D_2(p)) p.$$

因子的次数定义为

$$\deg D = \sum_{p \in M} D(p).$$

例 3.2 (亚纯函数的因子). 设 f 是 M 上的非零亚纯函数。定义

$$(f) = \sum_{p \in M} v_p(f) p,$$

其中 $v_p(f)$ 是定义 2.45 中的赋值：若 p 是 m 阶零点，则 $v_p(f) = m$ ；若 p 是 m 阶极点，则 $v_p(f) = -m$ ；

若 p 既不是零点也不是极点, 则 $v_p(f) = 0$. 由于 M 紧致, 零点和极点都是有限个, 所以 (f) 是因子。

由推论 2.52, 非零非常值亚纯函数的零点总数等于极点总数, 均按重数计算。因此正赋值之和与负赋值绝对值之和相等, 从而

$$\deg(f) = 0.$$

并且

$$(fg) = (f) + (g), \quad (f/g) = (f) - (g).$$

定义 3.3 (主要因子与线性等价). 若 f 是 M 上的非零亚纯函数, 则称 (f) 为主要因子。主要因子全体记为

$$\text{Prin}(M) = \{(f) : f \in \mathcal{M}(M)^*\}.$$

这里我们还没有证明任意紧致黎曼曲面上一定存在非常值亚纯函数; 这个存在性会在后面借助 *Hodge* 定理证明。不过只要给定一个非零亚纯函数, 它就按照上面的方式给出一个主要因子。主要因子全体是 $\text{Div}(M)$ 的子群, 并且包含在 $\ker(\deg)$ 中。

商群

$$\text{Cl}(M) = \text{Div}(M)/\text{Prin}(M)$$

称为因子类群。若 $D - D'$ 是主要因子, 则称 D 与 D' 线性等价, 记为

$$D \sim D'.$$

前面定义的是亚纯函数的因子和主要因子。下面定义亚纯微分的因子; 这和函数的因子类似, 但局部对象从函数变成了 1-形式。

例 3.4 (亚纯微分的因子与典范因子). 设 ω 是 M 上的非零亚纯微分。若在 p 附近取局部坐标 z , 并写

$$\omega = f(z) dz,$$

则定义

$$v_p(\omega) = v_{z(p)}(f).$$

这个数与局部坐标的选取无关, 证明略去。于是

$$(\omega) = \sum_{p \in M} v_p(\omega) p$$

是一个因子。

若 ω_1, ω_2 是两个非零亚纯微分, 则 ω_1/ω_2 是一个亚纯函数, 并且

$$(\omega_1) - (\omega_2) = (\omega_1/\omega_2).$$

因此所有非零亚纯微分给出的因子都在线性等价意义下相同。这个因子类称为典范因子类, 常记为 K 。任一非零亚纯微分的因子都可称为一个典范因子。

这里的商 ω_1/ω_2 是这样理解的。取局部坐标 z , 写

$$\omega_1 = f_1(z) dz, \quad \omega_2 = f_2(z) dz.$$

局部定义

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} := \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

若换坐标 w , 且 $z = z(w)$, 则

$$\omega_j = f_j(z(w)) \frac{dz}{dw} dw, \quad j = 1, 2.$$

两个系数相除时, 公共因子 dz/dw 消去, 所以局部定义彼此相容, 得到一个全局亚纯函数。于是对任意点 p ,

$$\nu_p \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \nu_p(\omega_1) - \nu_p(\omega_2),$$

从而得到因子等式

$$(\omega_1/\omega_2) = (\omega_1) - (\omega_2).$$

定义 3.5 (与因子相关的两个空间). 设 D 为 M 上的因子。定义

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(M) : (f) + D \geq 0\},$$

$$\mathcal{F}(D) = \{\omega \in \mathcal{H}(M) : (\omega) - D \geq 0\},$$

其中 $\mathcal{M}(M)$ 表示 M 上亚纯函数全体, $\mathcal{H}(M)$ 表示 M 上亚纯微分全体。并约定零函数和零微分属于上述空间。

记

$$l(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D), \quad i(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(D).$$

这里 $(f) + D \geq 0$ 是在映射意义下说的: 对任意 $p \in M$,

$$\nu_p(f) + D(p) \geq 0.$$

同理, $(\omega) - D \geq 0$ 表示对任意 $p \in M$,

$$\nu_p(\omega) - D(p) \geq 0.$$

引理 3.6. 设 D, D' 为 M 上因子。

1. $\mathcal{L}(D)$ 与 $\mathcal{F}(D)$ 都是复向量空间。若 $D \sim D'$, 则

$$\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{L}(D'), \quad \mathcal{F}(D) \simeq \mathcal{F}(D').$$

2. $\mathcal{L}(D)$ 与 $\mathcal{F}(D)$ 都是有限维复向量空间。

3. 若 K 为典范因子, 则

$$\mathcal{J}(D) \simeq \mathcal{L}(K - D).$$

证明. 先证明 (1)。证明 $\mathcal{L}(D)$ 是复向量空间。若 $f, g \in \mathcal{L}(D)$, 则对任意 $p \in M$,

$$v_p(f) + D(p) \geq 0, \quad v_p(g) + D(p) \geq 0.$$

由命题 2.46,

$$v_p(f + g) \geq \min\{v_p(f), v_p(g)\}.$$

因此

$$v_p(f + g) + D(p) \geq \min\{v_p(f) + D(p), v_p(g) + D(p)\} \geq 0.$$

所以 $f + g \in \mathcal{L}(D)$ 。若 $c \in \mathbb{C}^*$, 则 $v_p(cf) = v_p(f)$, 故 $cf \in \mathcal{L}(D)$; 若 $c = 0$, 零函数按约定属于 $\mathcal{L}(D)$ 。于是 $\mathcal{L}(D)$ 为复向量空间。

再看 $\mathcal{J}(D)$ 。若 $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{J}(D)$, 则

$$v_p(\eta_1) \geq D(p), \quad v_p(\eta_2) \geq D(p).$$

局部写

$$\eta_1 = f_1(z) dz, \quad \eta_2 = f_2(z) dz.$$

则

$$\eta_1 + \eta_2 = (f_1 + f_2) dz.$$

由亚纯函数赋值的不等式,

$$v_p(f_1 + f_2) \geq \min\{v_p(f_1), v_p(f_2)\}.$$

也就是

$$v_p(\eta_1 + \eta_2) \geq \min\{v_p(\eta_1), v_p(\eta_2)\} \geq D(p).$$

所以 $\eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{J}(D)$ 。数乘同理, 因此 $\mathcal{J}(D)$ 也是复向量空间。

若 $D' = D + (f_0)$, 其中 f_0 是非零亚纯函数, 则

$$(f) + D' \geq 0 \iff (f f_0) + D \geq 0.$$

这是因为

$$v_p(f f_0) + D(p) = v_p(f) + v_p(f_0) + D(p) = v_p(f) + D'(p).$$

于是

$$\Phi : \mathcal{L}(D') \rightarrow \mathcal{L}(D), \quad f \mapsto f f_0$$

是线性映射。其逆映射为

$$\Psi : \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D'), \quad h \mapsto h/f_0.$$

因此 $\mathcal{L}(D') \simeq \mathcal{L}(D)$ 。对 $\mathcal{F}(D)$ 也同理：若 $\eta \in \mathcal{F}(D')$ ，则

$$(\eta) - D' \geq 0 \iff (\eta/f_0) - D \geq 0,$$

所以除以 f_0 给出 $\mathcal{F}(D') \rightarrow \mathcal{F}(D)$ 的同构，乘以 f_0 给出逆映射。

下面证明 (2) 中 $\mathcal{L}(D)$ 的有限维性。先把 D 写成两个有效因子的差

$$D = D_1 - D_2, \quad D_1 \geq 0, \quad D_2 \geq 0.$$

具体地，

$$D_1(p) = \max\{D(p), 0\}, \quad D_2(p) = \max\{-D(p), 0\}.$$

如果 $f \in \mathcal{L}(D)$ ，则

$$(f) + D = (f) + D_1 - D_2 \geq 0.$$

因为 $D_2 \geq 0$ ，得到

$$(f) + D_1 = (f) + D + D_2 \geq 0.$$

所以 $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D_1)$ 。因此只需证明有效因子情形。对 $\deg D_1$ 归纳。若 $\deg D_1 = 0$ ，则 $D_1 = 0$ ，此时 $\mathcal{L}(0)$ 就是 M 上全纯函数空间；由推论 2.5，它只由常值函数组成，因此有限维。

设结论对次数为 m 的有效因子已成立。若 $\deg D_1 = m + 1$ ，可写

$$D_1 = np + D_0, \quad n > 0, \quad D_0 \geq 0, \quad D_0(p) = 0.$$

这里 p 是 D_1 支集中的一个点， $n = D_1(p)$ ，而 $D_0 = D_1 - np$ 。令

$$A = \{f \in \mathcal{L}(D_1) : v_p(f) > -n\}.$$

注意 $D_1 - p = (n-1)p + D_0$ 仍是有效因子，且次数为 m 。由定义，

$$f \in A \iff (f) + (D_1 - p) \geq 0,$$

所以 $A = \mathcal{L}(D_1 - p)$ 。由归纳假设， A 有限维。

若不存在满足 $v_p(f) = -n$ 的元素，则每个 $f \in \mathcal{L}(D_1)$ 都满足 $v_p(f) > -n$ ，所以 $\mathcal{L}(D_1) = A$ ，有限维。

否则取一个 $f_0 \in \mathcal{L}(D_1)$ ，使 $v_p(f_0) = -n$ 。在 p 附近坐标 z 中写

$$f_0 = a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \cdots, \quad a_{-n} \neq 0.$$

任取 $f \in \mathcal{L}(D_1)$ 。若 $v_p(f) > -n$ ，则本来就有 $f \in A$ 。若 $v_p(f) = -n$ ，在同一局部坐标中写

$$f = b_{-n}z^{-n} + b_{-n+1}z^{-n+1} + \cdots, \quad b_{-n} \neq 0.$$

取

$$\lambda = \frac{b_{-n}}{a_{-n}}.$$

则 $f - \lambda f_0$ 的 z^{-n} 项系数为

$$b_{-n} - \lambda a_{-n} = b_{-n} - \frac{b_{-n}}{a_{-n}} a_{-n} = 0.$$

所以

$$\nu_p(f - \lambda f_0) > -n.$$

另一方面, $\mathcal{L}(D_1)$ 已经证明是向量空间, 因此 $f - \lambda f_0 \in \mathcal{L}(D_1)$ 。于是 $f - \lambda f_0 \in A$, 并且

$$f = (f - \lambda f_0) + \lambda f_0.$$

因此

$$\mathcal{L}(D_1) = A + \mathbb{C}f_0,$$

仍有限维。这证明了 $\mathcal{L}(D)$ 的有限维性。

$\mathcal{I}(D)$ 的有限维性可由 (3) 推出, 因为 (3) 给出

$$\mathcal{I}(D) \simeq \mathcal{L}(K - D),$$

而右边已经证明有限维。(3) 的证明需要先选取非零亚纯微分并比较两个亚纯微分之比, 细节这里略去。□

3.2. Hodge 定理

本节始终设 M 是紧致黎曼曲面。目标是证明 1-形式的 Hodge 分解:

$$\omega = \omega_h + df + *dg,$$

其中 ω_h 调和, df 恰当, $*dg$ 余恰当。这个分解把任意 1-形式拆成三个正交部分, 并给出 de Rham 上同调类的唯一调和代表。这个分解也是构造带指定极点的亚纯微分的关键工具。

3.2.1. 度量、星算子与内积

黎曼曲面的定义只给出了复坐标和全纯坐标变换。为了谈长度、面积、正交、伴随算子和 Laplace 算子, 需要先选一个与复结构相容的度量。

定义 3.7 (相容 Hermite 度量). 设 M 为黎曼曲面。先把 M 看成一个实二维光滑流形。一个 *Riemann* 度量, 是指对每个点 $p \in M$, 在实切空间 $T_p M$ 上给定一个正定对称双线性内积

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

并且它随 p 光滑变化。

黎曼曲面的复结构在每个切空间上给出一个算子

$$J_p : T_p M \rightarrow T_p M,$$

它在局部复坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$ 中满足

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

一个 *Riemann* 度量称为与复结构相容, 或者称为相容 *Hermite* 度量, 如果

$$\langle JX, JY \rangle_p = \langle X, Y \rangle_p$$

对所有 $p \in M$ 与 $X, Y \in T_p M$ 成立。

下面说明这个定义等价于常用的局部表达。取局部复坐标

$$z = x + \sqrt{-1}y.$$

这个复坐标给出实坐标 (x, y) , 也给出切空间的一组局部基

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}.$$

为了简写, 记

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

任意切向量 $X, Y \in T_p M$ 在这个基下都可唯一写成

$$X = ae_1 + be_2, \quad Y = ce_1 + de_2.$$

因为度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ 是对称双线性型, 它在这组基下完全由三个函数决定:

$$E = \langle e_1, e_1 \rangle, \quad F = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle, \quad G = \langle e_2, e_2 \rangle.$$

这些函数随点 p 光滑变化, 因为度量本身光滑。

现在用双线性展开计算

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle \\ &= ac\langle e_1, e_1 \rangle + ad\langle e_1, e_2 \rangle + bc\langle e_2, e_1 \rangle + bd\langle e_2, e_2 \rangle \\ &= Eac + Fad + Fbc + Gbd. \end{aligned}$$

另一方面,

$$dx(X) = a, \quad dy(X) = b, \quad dx(Y) = c, \quad dy(Y) = d.$$

这里 g 表示度量本身, 即

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

因此在坐标基下, g 由公式

$$g(X, Y) = Eac + Fad + Fbc + Gbd$$

确定。传统上常把 g 记作 ds^2 , 并把这个双线性型简写为

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

这里 ds^2 只是度量 g 的传统记号, 不是某个函数 s 的微分平方。这个记号的含义是: 把切向量代入后, 按上面的双线性公式计算。特别地,

$$g(X, X) = \langle X, X \rangle = Ea^2 + 2Fab + Gb^2.$$

由于度量正定, 任意非零 X 都满足 $g(X, X) > 0$, 这等价于矩阵

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

正定。

复结构满足

$$Je_1 = e_2, \quad Je_2 = -e_1.$$

若度量与复结构相容, 则

$$\langle Je_1, Je_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle$$

给出

$$G = E.$$

又由

$$\langle Je_1, Je_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$$

得到

$$\langle e_2, -e_1 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle,$$

即

$$-F = F.$$

所以

$$F = 0.$$

因此相容度量在局部必为

$$ds^2 = E(dx^2 + dy^2).$$

由于度量正定, $E > 0$ 。令

$$\lambda = \sqrt{E},$$

就得到

$$ds^2 = \lambda(z)^2(dx^2 + dy^2), \quad \lambda > 0.$$

反过来, 若度量局部具有这个形式, 则直接计算可得

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

所以它与复结构相容。

定义 3.8 (面积形式). 若局部度量为

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2),$$

则由这个度量给出的面积形式记为

$$dA = \lambda^2 dx \wedge dy.$$

这里 A 只是英文 *area* 的记号, dA 表示“面积元素”或“面积形式”。复结构规定了方向, 即 $dx \wedge dy$ 是正方向的面积形式。

在复坐标中

$$dz = dx + \sqrt{-1} dy, \quad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1} dy,$$

并且

$$dz \wedge d\bar{z} = (dx + \sqrt{-1} dy) \wedge (dx - \sqrt{-1} dy) = -2\sqrt{-1} dx \wedge dy.$$

因此也可写为

$$dA = \frac{\sqrt{-1}}{2} \lambda^2 dz \wedge d\bar{z}.$$

Hodge 星算子

定义 3.9 (复系数微分形式). 记 $A^q(M)$ 为 M 上光滑复系数 q -形式的复向量空间。这里 $q = 0, 1, 2$ 。具体地:

- ▶ $A^0(M)$ 是 M 上光滑复值函数全体;
- ▶ $A^1(M)$ 是光滑复系数 1-形式全体, 局部可写为 $a dx + b dy$, 其中 a, b 是光滑复值函数;
- ▶ $A^2(M)$ 是光滑复系数 2-形式全体, 局部可写为 $c dx \wedge dy$ 。

也记

$$A^\bullet(M) = A^0(M) \oplus A^1(M) \oplus A^2(M).$$

定义 3.10 (Hodge 星算子). 在二维定向 Riemann 流形上, Hodge 星算子 $*$ 是把 q -形式送到 $(2-q)$ -形式的线性算子。

这里 $q = 0, 1, 2$ 。0-形式就是光滑函数; 特别地, 1 表示恒等于 1 的常值函数。2-形式局部可写成函数乘以 $dx \wedge dy$ 。对本节的局部坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$, 先规定

$$*1 = dA, \quad *dA = 1,$$

也就是说, $*$ 把常值函数 1 送到面积形式, 把面积形式送回常值函数 1。由线性性, 对任意光滑函数

f 和任意 2-形式 $h \, dA$, 有

$$*f = f \, dA, \quad *(h \, dA) = h.$$

并且在 1-形式上规定

$$*dx = dy, \quad *dy = -dx.$$

于是对任意局部 1-形式

$$\alpha = a \, dx + b \, dy$$

有

$$*\alpha = a \, dy - b \, dx.$$

由定义直接计算：

$$*^2 dx = *dy = -dx, \quad *^2 dy = *(-dx) = -dy.$$

所以在 1-形式上

$$*^2 = -1.$$

下面把 $*$ 写成复坐标形式。因为

$$dz = dx + \sqrt{-1} \, dy,$$

所以

$$\begin{aligned} *dz &= *dx + \sqrt{-1} *dy \\ &= dy + \sqrt{-1}(-dx) \\ &= dy - \sqrt{-1} \, dx \\ &= -\sqrt{-1}(dx + \sqrt{-1} \, dy) \\ &= -\sqrt{-1} \, dz. \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} *d\bar{z} &= *dx - \sqrt{-1} *dy \\ &= dy - \sqrt{-1}(-dx) \\ &= dy + \sqrt{-1} \, dx \\ &= \sqrt{-1}(dx - \sqrt{-1} \, dy) \\ &= \sqrt{-1} \, d\bar{z}. \end{aligned}$$

因此

$$*dz = -\sqrt{-1} \, dz, \quad *d\bar{z} = \sqrt{-1} \, d\bar{z}.$$

注 3.11 (类型分解与 $*$). 一个复系数 1-形式局部可唯一写成

$$\omega = u \, dz + v \, d\bar{z}.$$

若原来

$$\omega = a \, dx + b \, dy,$$

则由

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(dz - d\bar{z})$$

可得

$$u = \frac{1}{2}(a - \sqrt{-1}b), \quad v = \frac{1}{2}(a + \sqrt{-1}b).$$

所以这种写法确实存在且唯一。其中 $u \, dz$ 称为 $(1, 0)$ 型部分, $v \, d\bar{z}$ 称为 $(0, 1)$ 型部分。上面的公式说明: $(1, 0)$ 型是 $*$ 的特征值 $-\sqrt{-1}$ 部分, $(0, 1)$ 型是 $*$ 的特征值 $\sqrt{-1}$ 部分。

外微分与内积

外微分仍记作

$$d: A^q(M) \rightarrow A^{q+1}(M),$$

它对复系数按复线性延拓。

定义 3.12 (L^2 Hermite 内积). 对复系数 1-形式 $\omega, \eta \in A^1(M)$, 定义

$$(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge \overline{*}\eta.$$

对 0-形式和 2-形式也用同样方式定义; 不同次数的形式规定正交。

这里横线表示对系数取复共轭。我们采用“第一变量线性、第二变量共轭线性”的约定。特别地, 对函数有

$$(f, g) = \int_M f \bar{g} \, dA.$$

若局部写

$$\omega = u_1 \, dz + v_1 \, d\bar{z}, \quad \eta = u_2 \, dz + v_2 \, d\bar{z},$$

则

$$*\eta = -\sqrt{-1}u_2 \, dz + \sqrt{-1}v_2 \, d\bar{z},$$

所以

$$\overline{*}\eta = \sqrt{-1}\overline{u_2} \, d\bar{z} - \sqrt{-1}\overline{v_2} \, dz.$$

于是

$$\begin{aligned} \omega \wedge \overline{*}\eta &= (u_1 \, dz + v_1 \, d\bar{z}) \wedge (\sqrt{-1}\overline{u_2} \, d\bar{z} - \sqrt{-1}\overline{v_2} \, dz) \\ &= \sqrt{-1}u_1\overline{u_2} \, dz \wedge d\bar{z} - \sqrt{-1}v_1\overline{v_2} \, d\bar{z} \wedge dz \\ &= \sqrt{-1}(u_1\overline{u_2} + v_1\overline{v_2}) \, dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

因为

$$\sqrt{-1} \, dz \wedge d\bar{z} = 2 \, dx \wedge dy$$

是正的面积方向, 所以

$$(\omega, \omega) \geq 0,$$

且等号当且仅当 $\omega = 0$ 。因此这是 Hermite 内积。相应范数记为

$$\|\omega\| = (\omega, \omega)^{1/2}.$$

3.2.2. 调和形式

定义 3.13 (闭、恰当与余恰当). 若 $\omega \in A^1(M)$ 满足 $d\omega = 0$, 称 ω 为闭 1-形式。若存在 $f \in A^0(M)$ 使

$$\omega = df,$$

称 ω 为恰当 1-形式。二维曲面上, 形如

$$*dg, \quad g \in A^0(M),$$

的 1-形式称为余恰当 1-形式。

定义 3.14 (调和 1-形式). 一个 1-形式 $\omega \in A^1(M)$ 称为调和 1-形式, 如果

$$d\omega = 0, \quad d(*\omega) = 0.$$

调和 1-形式全体记为

$$\mathcal{H}^1(M).$$

第二个条件 $d(*\omega) = 0$ 可以理解为“余闭”。后面引入形式伴随 d^* 后, 它等价于 $d^*\omega = 0$ 。

引理 3.15 (全纯 1-形式与调和形式). 全纯 1-形式一定调和。反过来, 若调和 1-形式是 $(1, 0)$ 型, 则它是全纯 1-形式。

证明. 若 ω 为全纯 1-形式, 则局部

$$\omega = f(z) dz,$$

其中 f 全纯。于是

$$d\omega = d(f dz) = df \wedge dz.$$

又

$$df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

全纯性等价于 $f_{\bar{z}} = 0$, 所以

$$d\omega = f_z dz \wedge dz = 0.$$

并且

$$*\omega = -\sqrt{-1}\omega,$$

故

$$d(*\omega) = -\sqrt{-1} d\omega = 0.$$

所以 ω 调和。

反过来, 设 ω 调和且为 $(1, 0)$ 型。局部写

$$\omega = f \, dz,$$

其中 f 先只是光滑函数。由 $d\omega = 0$, 得

$$0 = d(f \, dz) = df \wedge dz = (f_z \, dz + f_{\bar{z}} \, d\bar{z}) \wedge dz = f_{\bar{z}} \, d\bar{z} \wedge dz.$$

因此

$$f_{\bar{z}} = 0.$$

这就是 Cauchy–Riemann 方程, 所以 f 全纯。于是 ω 是全纯 1-形式。 □

记 $H(M)$ 为 M 上全纯 1-形式空间, 记

$$\overline{H(M)} = \{\bar{\omega} : \omega \in H(M)\}.$$

引理 3.16 (调和形式的类型分解). 有复向量空间直和分解

$$\mathcal{H}^1(M) = H(M) \oplus \overline{H(M)}.$$

证明. 若 $\omega \in H(M)$, 则 ω 调和。其共轭 $\bar{\omega}$ 是 $(0, 1)$ 型, 而且

$$*\bar{\omega} = \sqrt{-1}\bar{\omega}.$$

因为 $d\omega = 0$, 取共轭得 $d\bar{\omega} = 0$, 所以 $\bar{\omega}$ 也调和。故

$$H(M) \oplus \overline{H(M)} \subset \mathcal{H}^1(M).$$

反过来, 设 $\eta \in \mathcal{H}^1(M)$ 。定义

$$\eta^{1,0} = \frac{1}{2}(\eta + \sqrt{-1} * \eta), \quad \eta^{0,1} = \frac{1}{2}(\eta - \sqrt{-1} * \eta).$$

先验证类型。利用 $*^2 = -1$, 有

$$\begin{aligned} *\eta^{1,0} &= \frac{1}{2}(*\eta + \sqrt{-1} *^2 \eta) = \frac{1}{2}(*\eta - \sqrt{-1} \eta) \\ &= -\sqrt{-1} \frac{1}{2}(\eta + \sqrt{-1} * \eta) = -\sqrt{-1} \eta^{1,0}. \end{aligned}$$

所以 $\eta^{1,0}$ 是 $(1, 0)$ 型。同理

$$*\eta^{0,1} = \sqrt{-1} \eta^{0,1},$$

所以 $\eta^{0,1}$ 是 $(0, 1)$ 型。

因为 η 调和, $d\eta = 0$ 且 $d(*\eta) = 0$, 所以

$$d\eta^{1,0} = 0, \quad d\eta^{0,1} = 0.$$

由引理 3.15, $\eta^{1,0}$ 是全纯 1-形式; 而 $\eta^{0,1}$ 是某个全纯 1-形式的共轭。因此

$$\eta = \eta^{1,0} + \eta^{0,1} \in H(M) \oplus \overline{H(M)}.$$

直和性来自类型分解的唯一性。 □

调和形式与恰当形式的正交性

引理 3.17 (调和形式与恰当形式正交). 若 $\omega \in \mathcal{H}^1(M)$, 则对任意 $f \in A^0(M)$,

$$(df, \omega) = 0.$$

特别地, 若 ω 既调和又恰当, 则 $\omega = 0$ 。

证明. 因为 ω 调和, 所以

$$d(*\omega) = 0.$$

由 Stokes 公式和 M 无边界, 得到

$$\begin{aligned} (df, \omega) &= \int_M df \wedge *\omega \\ &= \int_M d(f*\omega) - \int_M f d(*\omega) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

若 $\omega = dh$ 且 ω 调和, 则

$$\|\omega\|^2 = (dh, \omega) = 0.$$

因此 $\omega = 0$. □

3.2.3. 形式伴随、Laplace 算子与 PDE 工具

定义 3.18 (形式伴随算子). 外微分

$$d : A^q(M) \rightarrow A^{q+1}(M)$$

关于 L^2 内积的形式伴随记为

$$d^* : A^{q+1}(M) \rightarrow A^q(M),$$

它满足

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta)$$

对所有光滑形式成立。由于 M 紧致无边界, 分部积分没有边界项, 因此 d^* 在光滑形式上良好定义。

在二维曲面上, 对 1-形式有

$$d^*\omega = 0 \iff d(*\omega) = 0.$$

原因是此时

$$d^* \omega = - * d(*\omega),$$

而 $*$ 是同构, 所以 $d^* \omega = 0$ 与 $d(*\omega) = 0$ 等价. 因此调和 1-形式也可等价地定义为

$$d\omega = 0, \quad d^* \omega = 0.$$

定义 3.19 (Hodge-Dirac 算子与 Laplace 算子). 令

$$P = d + d^*, \quad \Delta = P^2 = dd^* + d^*d.$$

P 称为 *Hodge-Dirac* 算子, Δ 称为 *Hodge Laplace* 算子. 这里用到

$$d^2 = 0, \quad (d^*)^2 = 0,$$

所以展开 P^2 时只剩下交叉项。

对 1-形式 ω , 有

$$(\Delta\omega, \omega) = \|d\omega\|^2 + \|d^*\omega\|^2.$$

这是形式伴随定义的直接结果:

$$(dd^*\omega, \omega) = (d^*\omega, d^*\omega), \quad (d^*d\omega, \omega) = (d\omega, d\omega).$$

所以

$$\Delta\omega = 0 \iff d\omega = 0, d^*\omega = 0 \iff \omega \in \mathcal{H}^1(M).$$

下面证明 Hodge 定理时会把 0-、1-、2-形式同时放进

$$A^\bullet(M) = A^0(M) \oplus A^1(M) \oplus A^2(M)$$

中处理. 此时称一个总形式 $\sigma \in A^\bullet(M)$ 调和, 是指

$$P\sigma = 0.$$

等价地, $\Delta\sigma = 0$. 事实上, 若 $P\sigma = 0$, 则当然 $\Delta\sigma = P^2\sigma = 0$; 反过来, 若 $\Delta\sigma = 0$, 由于 $P = d + d^*$ 关于 L^2 内积自伴随, 有

$$0 = (\Delta\sigma, \sigma) = (P\sigma, P\sigma),$$

所以 $P\sigma = 0$. 所有次数的调和形式组成的向量空间下面记为 $\mathcal{H}$. 其中次数为 1 的部分就是前面定义的 $\mathcal{H}^1(M)$.

需要使用的一些 PDE 工具

Hodge 定理的证明需要若干椭圆型 PDE 标准工具. 相关定义见附录 A.4。

引理 3.20 (Sobolev、Rellich 与 Weyl 正则性). 对紧致黎曼面上的复系数微分形式, 有如下结论。

1. 可以用 P 定义 Sobolev 空间 $H^s(A^\bullet)$, 并且

$$H^{s+1}(A^\bullet) = \{\sigma \in H^s(A^\bullet) : P\sigma \in H^s(A^\bullet)\}.$$

2. Rellich 紧性: 包含映射

$$H^1(A^\bullet) \hookrightarrow H^0(A^\bullet)$$

是紧算子。

3. Sobolev 嵌入: 对任意 $s \geq 0$,

$$H^{s+2}(A^\bullet) \subset C^s(A^\bullet).$$

4. Weyl 正则性: 若 $\sigma \in H^0(A^\bullet)$ 且 $P\sigma$ 光滑, 则 σ 光滑; 若 $\sigma \in H^1(A^\bullet)$ 且 $\Delta\sigma$ 光滑, 则 σ 光滑。

下面证明中出现的 $\|\cdot\|_{H^0}$ 就是 L^2 范数, $\|\cdot\|_{H^1}$ 是由

$$\|\sigma\|_{H^1}^2 = \|\sigma\|_{H^0}^2 + \|P\sigma\|_{H^0}^2$$

给出的一阶 Sobolev 范数。引理 3.20 在证明中提供紧致性与正则性。

3.2.4. Hodge 分解定理

定理 3.21 (Hodge 定理). 设 M 为紧致黎曼曲面。对任意

$$\omega \in A^1(M),$$

存在唯一的调和 1-形式 $\omega_h \in \mathcal{H}^1(M)$, 以及在相差常数意义下唯一的光滑函数 $f, g \in A^0(M)$, 使得

$$\omega = \omega_h + df + *dg.$$

并且三项两两正交。

证明. 证明分四步。

第一步: 调和形式空间有限维。若调和形式空间无限维, 则可取一系列规范正交的调和形式

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \quad \|\sigma_j\|_{H^0} = 1, \quad (\sigma_i, \sigma_j) = 0 \ (i \neq j).$$

因为 σ_j 调和, 所以

$$P\sigma_j = 0.$$

于是

$$\|\sigma_j\|_{H^1}^2 = \|\sigma_j\|_{H^0}^2 + \|P\sigma_j\|_{H^0}^2 = 1.$$

由 Rellich 紧性, $\{\sigma_j\}$ 在 H^0 中有收敛子列。但若 $i \neq j$, 规范正交给出

$$\|\sigma_i - \sigma_j\|_{H^0}^2 = \|\sigma_i\|^2 + \|\sigma_j\|^2 - 2\operatorname{Re}(\sigma_i, \sigma_j) = 2.$$

这与存在 Cauchy 子列矛盾。因此调和形式空间有限维。

第二步：在调和形式的正交补上建立估计。令 $\mathcal{H}$ 表示所有次数的调和形式组成的有限维空间。它的 L^2 正交补记为

$$\mathcal{H}^\perp = \{\alpha : (\alpha, h) = 0 \text{ 对所有 } h \in \mathcal{H}\}.$$

我们证明存在常数 $c > 0$, 使得

$$\|P\alpha\|_{H^0} \geq c\|\alpha\|_{H^0}, \quad \alpha \in \mathcal{H}^\perp.$$

若不然, 则存在 $\alpha_j \in \mathcal{H}^\perp$, 满足

$$\|\alpha_j\|_{H^0} = 1, \quad \|P\alpha_j\|_{H^0} \rightarrow 0.$$

于是

$$\|\alpha_j\|_{H^1}^2 = \|\alpha_j\|_{H^0}^2 + \|P\alpha_j\|_{H^0}^2$$

有界。由 Rellich 紧性, 取子列仍记为 α_j , 使其在 H^0 中收敛到某个 α 。

对任意光滑形式 τ , 由形式伴随关系,

$$(\alpha, P\tau) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\alpha_j, P\tau) = \lim_{j \rightarrow \infty} (P\alpha_j, \tau) = 0.$$

这说明

$$P\alpha = 0$$

在弱意义下成立。由 Weyl 正则性, α 实际光滑, 并且调和, 即 $\alpha \in \mathcal{H}$ 。另一方面, $\mathcal{H}^\perp$ 是 Hilbert 空间中的闭子空间; 因为每个 $\alpha_j \in \mathcal{H}^\perp$ 且 $\alpha_j \rightarrow \alpha$, 所以 $\alpha \in \mathcal{H}^\perp$ 。于是 $\alpha = 0$ 。但 $\|\alpha_j\|_{H^0} = 1$ 且 $\alpha_j \rightarrow \alpha$, 矛盾。

第三步：解 Laplace 方程。给定

$$\sigma \in \mathcal{H}^\perp.$$

在 $\mathcal{H}^\perp$ 上定义内积

$$[\alpha, \beta] = (P\alpha, P\beta).$$

由第二步的估计, 这个内积给出的范数控制 H^0 范数。线性泛函

$$L_\sigma(\alpha) = (\alpha, \sigma)$$

在此范数下有界, 因为

$$|(\alpha, \sigma)| \leq \|\alpha\|_{H^0} \|\sigma\|_{H^0} \leq c^{-1} \|P\alpha\|_{H^0} \|\sigma\|_{H^0}.$$

由 Riesz 表示定理, 存在 $u \in \mathcal{H}^\perp$, 使得

$$(\alpha, \sigma) = [\alpha, u] = (P\alpha, Pu) = (\alpha, \Delta u)$$

对所有光滑 $\alpha \in \mathcal{H}^\perp$ 成立。因此

$$\Delta u = \sigma$$

对 $\mathcal{H}^\perp$ 方向的测试形式成立。若测试形式 $h \in \mathcal{H}$, 则

$$(h, \sigma) = 0, \quad (h, \Delta u) = (\Delta h, u) = 0.$$

所以同一个等式对所有光滑测试形式都成立, 即

$$\Delta u = \sigma$$

弱意义成立。由 Weyl 正则性, u 光滑。

于是对任意光滑形式 σ , 若 $H\sigma$ 表示 σ 到有限维空间 $\mathcal{H}$ 的 L^2 正交投影, 则

$$\sigma - H\sigma \in \mathcal{H}^\perp.$$

把上面的解方程结论用于 $\sigma - H\sigma$, 得到光滑形式 $G\sigma$, 满足

$$\Delta G\sigma = \sigma - H\sigma.$$

这个 G 称为 Green 算子。因此

$$\sigma = H\sigma + \Delta G\sigma.$$

第四步: 得到 1-形式分解。令 $\omega \in A^1(M)$ 。算子 $d d^*$ 和 $d^* d$ 都把 q -形式送回 q -形式, 所以 Δ 保持形式次数。不同次数的形式彼此正交, 因此正交投影 $H\omega$ 也仍是 1-形式的调和部分, 记为

$$\omega_h = H\omega \in \mathcal{H}^1(M).$$

因此可以取 $G\omega \in A^1(M)$ 。于是

$$\omega = \omega_h + \Delta G\omega = \omega_h + d d^* G\omega + d^* d G\omega.$$

第一项

$$d d^* G\omega$$

是恰当 1-形式, 可记为

$$df.$$

第二项

$$d^* d G\omega$$

是余恰当 1-形式。这里也可以直接看出它具有

$$*dg$$

的形式：因为 $dG\omega$ 是 2-形式，可写成

$$dG\omega = h \, dA$$

其中 h 是光滑函数。由二维情形下

$$d^*(h \, dA) = -* \, dh$$

可得。这个公式来自

$$d^* = -* \, d^*$$

作用在 2-形式上，因为 $*(h \, dA) = h$ 。于是

$$d^* dG\omega = -* \, dh = *d(-h).$$

令 $g = -h$ ，就得到余恰当项。因此

$$\omega = \omega_h + df + *dg.$$

最后证明正交性与唯一性。调和形式与恰当形式正交由引理 3.17 给出。若 η_h 调和，则 $*\eta_h$ 也调和，所以

$$(*dg, \eta_h) = \int_M *dg \wedge \overline{* \eta_h} = \int_M dg \wedge \overline{\eta_h} = -(dg, *\eta_h) = 0,$$

这里用到 $*\eta_h$ 仍调和，最后一步由引理 3.17 得到。恰当项与余恰当项也正交：

$$(df, *dg) = \int_M df \wedge \overline{*(dg)} = - \int_M df \wedge \overline{dg} = - \int_M d(f \, \overline{dg}) = 0,$$

其中用到 $d\overline{dg} = 0$ 和 Stokes 公式。

若有两个分解，相减得

$$0 = \eta_h + df + *dg.$$

三项正交，取范数平方得到

$$0 = \|\eta_h\|^2 + \|df\|^2 + \|\ast dg\|^2.$$

因此三项全为零。于是 $\eta_h = 0$ ，且 $df = 0$ ， $dg = 0$ ，所以 f, g 至多相差常数。唯一性得证。 □

3.2.5. 上同调、亏格与应用

定义 3.22 (de Rham 上同调). 一阶 *de Rham* 上同调定义为

$$H_{\text{dR}}^1(M) = \frac{\{\omega \in A^1(M) : d\omega = 0\}}{\{df : f \in A^0(M)\}}.$$

也就是说，两个闭 1-形式代表同一个上同调类，当且仅当它们相差一个恰当形式。

推论 3.23 (de Rham 类的唯一调和代表). 自然映射

$$\mathcal{H}^1(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(M), \quad \omega \mapsto [\omega]$$

是线性同构。特别地，

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{dR}}^1(M) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^1(M) = 2 \dim_{\mathbb{C}} H(M).$$

数

$$g = \dim_{\mathbb{C}} H(M)$$

称为 M 的亏格。

证明. 先证明满射。设 ω 为闭 1-形式。由 Hodge 定理，

$$\omega = \omega_h + df + *dg.$$

因为 $d\omega = 0$ ，得

$$d(*dg) = 0.$$

形式 $*dg$ 与调和形式和恰当形式都正交，因此

$$\|*dg\|^2 = (\omega - \omega_h - df, *dg) = 0.$$

所以 $*dg = 0$ 。于是

$$\omega = \omega_h + df,$$

即

$$[\omega] = [\omega_h].$$

每个 de Rham 类都有调和代表。

再证明单射。若两个调和形式 ω_1, ω_2 代表同一个 de Rham 类，则

$$\omega_1 - \omega_2 = df.$$

左边仍调和，右边恰当。由引理 3.17，恰当调和形式只能为零，所以

$$\omega_1 = \omega_2.$$

调和代表唯一。

最后由引理 3.16，

$$\mathcal{H}^1(M) = H(M) \oplus \overline{H(M)},$$

故

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^1(M) = 2 \dim_{\mathbb{C}} H(M).$$

□

注 3.24 (这里的亏格与拓扑亏格). 由上式可知

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{dR}}^1(M) = 2g.$$

如果把 M 看作紧致定向拓扑曲面, 则 g 正是通常意义下的拓扑亏格, 即“洞的个数”。这一等价可由曲面分类定理或 de Rham 上同调与奇异上同调的比较得到。

指定极点的亚纯微分

下面记录 Hodge 分解的两个应用。第一个结论通过截断函数制造指定主部, 再用 Hodge 分解修正其非全纯部分。

推论 3.25 (带指定高阶极点的亚纯微分). 设 $p \in M$, $n \geq 1$ 。取 p 附近坐标盘 B 与局部坐标 z , 满足 $z(p) = 0$ 。则存在 M 上的亚纯微分 η , 使得 η 只可能在 p 有极点, 并且在 p 附近

$$\eta = d\left(\frac{1}{z^n}\right) + \theta,$$

其中 θ 是 p 附近的全纯 1-形式。

注 3.26 (为什么这个推论重要). 这个推论说明紧致黎曼曲面上存在非零亚纯微分, 并为构造亚纯函数提供输入。

周期为零推出单值原函数

为了把亚纯微分积分成亚纯函数, 需要两个关于周期的标准事实。

引理 3.27 (闭形式有原函数的判别). 设 X 为连通光滑曲面, α 为 X 上的闭 1-形式。若对每条分段光滑闭曲线 γ 都有

$$\int_{\gamma} \alpha = 0,$$

则存在光滑函数 $F : X \rightarrow \mathbb{C}$, 使得

$$dF = \alpha.$$

反过来, 若 $\alpha = dF$, 则所有闭曲线上的积分都为零。

引理 3.28 (穿孔曲面的周期生成). 设 M 是紧致连通曲面, $p \in M$ 。令

$$M^* = M \setminus \{p\}.$$

若 α 是 M^* 上的闭 1-形式, 并且满足:

1. 对 M^* 中来自 M 的全局闭曲线, α 的周期为零;

2. α 在绕 p 的足够小正向圆周上的周期为零；
则 α 在 M^* 上任意闭曲线的周期都为零。

也就是说，穿孔以后除原有一维周期外，只额外出现绕 p 的小圆周。

亏格零曲面

推论 3.29 (亏格零曲面). 若紧致黎曼曲面 M 的亏格为 0，则

$$M \simeq \mathbb{CP}^1$$

作为黎曼曲面全纯同构。

证明. 取 $p \in M$ ，并在 p 附近取局部坐标 z ，满足 $z(p) = 0$ 。由推论 3.25，存在亚纯微分 η ，它只可能在 p 有极点，并且

$$\eta = d(1/z) + \theta$$

在 p 附近成立，其中 θ 是全纯 1-形式。因为

$$d(1/z) = -z^{-2} dz$$

没有 $z^{-1} dz$ 项，而全纯 1-形式也没有负幂项，所以

$$\text{Res}_p(\eta) = 0.$$

亏格 $g = 0$ 时，由推论 3.23，

$$H_{\text{dR}}^1(M) = 0.$$

因此 M 没有非平凡的一维全局周期。现在考虑穿孔曲面

$$M^* = M \setminus \{p\}.$$

在 M^* 上， η 是全纯 1-形式，所以闭。绕 p 的小圆周 γ_p 上，

$$\int_{\gamma_p} \eta = 2\pi\sqrt{-1} \text{Res}_p(\eta) = 0.$$

由引理 3.28， η 在 M^* 上所有闭曲线的周期均为零。

由引理 3.27，存在单值函数

$$f : M^* \rightarrow \mathbb{C}$$

使

$$df = \eta.$$

在 p 附近, 因为

$$\eta = d(1/z) + \theta,$$

而 θ 是全纯 1-形式, 局部可写成 $h(z) dz$ 。由单复变中全纯函数有局部原函数, 存在全纯函数 H 使

$$dH = \theta.$$

积分得到

$$f = \frac{1}{z} + H + \text{常数}.$$

所以在坐标 z 中, f 在 p 附近具有一个一阶极点。令 $f(p) = \infty$, 便可把 f 延拓为 M 上的亚纯函数, 并且只有一个单极点 p 。

于是

$$f : M \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

是一个非常值亚纯函数, 也就是到黎曼球面的非常值全纯映射。

这里用到前面关于亚纯函数的结论: 这种映射的次数等于一般纤维的计重数点数, 也等于极点总数按阶数计数。因为 f 只有一个单极点, 所以

$$\deg f = 1.$$

次数为 1 表示一般纤维只有一个点且重数为 1。由全纯映射的局部标准形, 所有纤维点也不可能出现两个不同原像; 否则一般值附近会出现至少两个原像。因此 f 是一一映射。

连续一一映射

$$f : M \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

从紧致空间到 Hausdorff 空间必为同胚。又因为局部标准形中重数处处为 1, 所以 f 在每一点附近都是全纯同构, 逆映射也全纯。故

$$M \simeq \mathbb{CP}^1.$$

□

A.1. 复分析标准工具

本节列出正文多次使用的单复变标准结论。证明可参见 Ahlfors [1]、Forster [4] 或 Gamelin [5]。

定理 A.1 (Cauchy 积分公式与 Taylor 展开). 设 f 在圆盘 $B_R(a)$ 上全纯。若 $0 < r < R$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad |z-a| < r.$$

特别地, f 在 a 附近有收敛 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

若 f 在穿孔圆盘 $0 < |z-a| < R$ 上全纯, 则在任意环域 $0 < |z-a| < r < R$ 上有 Laurent 展开。

定理 A.2 (恒等定理). 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域, f, g 为 D 上全纯函数。若集合

$$\{z \in D : f(z) = g(z)\}$$

在 D 中有聚点, 则 $f \equiv g$ 。

定理 A.3 (全纯反函数定理). 若 f 在 a 附近全纯且 $f'(a) \neq 0$, 则存在 a 的邻域 U 与 $f(a)$ 的邻域 V , 使

$$f : U \rightarrow V$$

为双全纯映射。

定理 A.4 (全纯对数与开根). 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为单连通区域, g 为 Ω 上处处非零的全纯函数。则存在全纯函数 G , 使

$$g = e^G.$$

因此, 对任意正整数 k , 存在全纯函数 h , 使 $h^k = g$ 。

定理 A.5 (Montel 定理与 Hurwitz 定理). 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为区域。

1. 若全纯函数族 $\mathcal{F}$ 在每个紧集上一致有界, 则 $\mathcal{F}$ 为正规族: 任意函数列都有子列在紧集上一致收敛到全纯函数或无穷远。
2. 若单叶全纯函数列 f_n 在紧集上一致收敛到非常值全纯函数 f , 则 f 仍然单叶。

A.2. 相容度量

正文中构造 Hermite 度量和 Hodge 星算子时使用如下标准结论。

推论 A.6 (黎曼曲面上的相容 Hermite 度量). 任意黎曼曲面 M 上都存在与复结构相容的 *Hermite* 度量。局部地, 它可写成

$$ds^2 = \lambda(z)^2 |dz|^2, \quad \lambda > 0.$$

A.3. 张量积与复化

下面给出张量积的严格定义。为避免重复, 先对任意域 $\mathbb{F}$ 说明; 本讲义使用时主要取 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。

设 V, W 为 $\mathbb{F}$ 上的向量空间。记 $F(V \times W)$ 为以集合 $V \times W$ 为基的自由 $\mathbb{F}$ -向量空间; 也就是说, $F(V \times W)$ 的元素是有限形式和

$$\sum_{j=1}^N a_j [(v_j, w_j)], \quad a_j \in \mathbb{F}, v_j \in V, w_j \in W.$$

令 R 为 $F(V \times W)$ 中由下列元素张成的子空间:

$$\begin{aligned} &[(v_1 + v_2, w)] - [(v_1, w)] - [(v_2, w)], \\ &[(v, w_1 + w_2)] - [(v, w_1)] - [(v, w_2)], \\ &[(av, w)] - a[(v, w)], \quad [(v, aw)] - a[(v, w)], \end{aligned}$$

其中 $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $a \in \mathbb{F}$ 。定义

$$V \otimes_{\mathbb{F}} W = F(V \times W)/R.$$

把 $[(v, w)]$ 在商空间中的等价类记为

$$v \otimes w.$$

由构造立刻得到双线性关系

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \quad v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2,$$

$$(av) \otimes w = a(v \otimes w) = v \otimes (aw).$$

这个定义的核心性质是如下普遍性质: 若 U 是另一个 $\mathbb{F}$ -向量空间, 且

$$B : V \times W \rightarrow U$$

是双线性映射, 则存在唯一的线性映射

$$\tilde{B} : V \otimes_{\mathbb{F}} W \rightarrow U$$

使得

$$\widetilde{B}(v \otimes w) = B(v, w).$$

反过来, 满足这个普遍性质的向量空间在唯一同构意义下就是 $V \otimes_{\mathbb{F}} W$ 。因此, 张量积的作用是把“双线性映射”统一转化为“线性映射”。

若 V 是实向量空间, 则它的复化定义为

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

因为 $\mathbb{C}$ 作为实向量空间有基 $1, \sqrt{-1}$, 所以 $V_{\mathbb{C}}$ 中每个元素都可唯一写成

$$X \otimes 1 + Y \otimes \sqrt{-1}, \quad X, Y \in V.$$

通常把它记为

$$X + \sqrt{-1}Y.$$

复数标量乘法由

$$(a + \sqrt{-1}b)(X + \sqrt{-1}Y) = (aX - bY) + \sqrt{-1}(bX + aY)$$

定义。这样 $V_{\mathbb{C}}$ 就成为复向量空间, 而原来的 V 通过 $X \mapsto X \otimes 1$ 嵌入其中。

A.4. Hodge 定理中的 PDE 背景

本附录补充 Hodge 定理中使用的分析语言。证明框架是在 L^2 完备化中寻找弱解, 再由椭圆正则性提升为光滑解。相关标准结果可参考 Folland [3]、Bott–Tu [2] 与 Wells [10]。

定义 A.7 (L^2 完备化). 对 $A^{\bullet}(M)$ 上的复系数微分形式使用正文中的内积。由范数

$$\|\sigma\|_{L^2} = (\sigma, \sigma)^{1/2}$$

完成化得到 Hilbert 空间, 记为

$$H^0(A^{\bullet}).$$

定义 A.8 (弱意义的 $P\sigma$). 设 $\sigma \in H^0(A^{\bullet})$ 。若存在 $\tau \in H^0(A^{\bullet})$, 使得对所有光滑形式 $\phi \in A^{\bullet}(M)$ 都有

$$(\tau, \phi) = (\sigma, P\phi),$$

则称 $P\sigma$ 在弱意义下存在, 并记为

$$P\sigma = \tau.$$

$\Delta\sigma$ 的弱意义定义类似: 若存在 $\tau \in H^0(A^{\bullet})$, 使

$$(\tau, \phi) = (\sigma, \Delta\phi)$$

对所有光滑 ϕ 成立, 则记 $\Delta\sigma = \tau$ 。

定义 A.9 (Sobolev 空间). 递归定义 *Sobolev* 空间。先令

$$H^0(A^\bullet) = L^2(A^\bullet).$$

若 $H^s(A^\bullet)$ 已定义, 则

$$H^{s+1}(A^\bullet) = \{\sigma \in H^s(A^\bullet) : P\sigma \text{ 弱意义存在且属于 } H^s(A^\bullet)\}.$$

范数为

$$\|\sigma\|_{H^{s+1}}^2 = \|\sigma\|_{L^2}^2 + \|P\sigma\|_{H^s}^2.$$

定义 A.10 (C^s 形式). 若微分形式 σ 在任意局部坐标中, 其系数函数有连续偏导数直到 s 阶, 则称 σ 为 C^s 形式。若对所有 $s \geq 0$ 都成立, 则称 σ 光滑。

定理 A.11 (Riesz 表示定理). 设 $\mathcal{V}$ 是 *Hilbert* 空间。如果

$$L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$$

是连续线性泛函, 则存在唯一的 $u \in \mathcal{V}$, 使得

$$L(v) = (v, u)$$

对所有 $v \in \mathcal{V}$ 成立。正文中第三步正是把这个结论用于 $\mathcal{H}^\perp$ 上的内积

$$[\alpha, \beta] = (P\alpha, P\beta).$$

定理 A.12 (PDE 标准结论). 在紧致黎曼曲面上, *Hodge-Dirac* 算子 P 和 *Laplace* 算子 Δ 满足:

1. *Sobolev* 递推刻画:

$$H^{s+1}(A^\bullet) = \{\sigma \in H^s(A^\bullet) : P\sigma \in H^s(A^\bullet)\}.$$

2. *Rellich* 紧性: 包含映射

$$H^1(A^\bullet) \hookrightarrow H^0(A^\bullet)$$

是紧算子。

3. *Sobolev* 嵌入:

$$H^{s+2}(A^\bullet) \subset C^s(A^\bullet).$$

4. *Weyl* 正则性: 若 $\sigma \in H^0(A^\bullet)$ 且 $P\sigma$ 光滑, 则 σ 光滑; 若 $\sigma \in H^1(A^\bullet)$ 且 $\Delta\sigma$ 光滑, 则 σ 光滑。

Hodge 定理参考文献说明

本节的调和形式、 $\mathcal{H}^1(M) = H(M) \oplus \overline{H(M)}$ 、Hodge 定理证明框架与亏格零应用, 主要参照梅加强 [8]。Hodge 星算子、形式内积和 de Rham 语言可参考 Bott-Tu [2]; 光滑流形和度量、单位分解背景可参考

Lee [7]; 椭圆正则性、Rellich 紧性和 Sobolev 嵌入可参考 Folland [3] 与 Wells [10]。

参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, 1979.
- [2] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 82, Springer, 1982.
- [3] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd ed., Princeton University Press, 1995.
- [4] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 81, Springer, 1981.
- [5] T. W. Gamelin, *Complex Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.
- [6] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.
- [7] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, 2013.
- [8] Jiaqiang Mei, *Compact Riemann Surface*, preliminary lecture notes, Nanjing University, 2010.
- [9] J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press, 1974.
- [10] R. O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics 65, Springer, 2008.
- [11] S. Lang, *Algebra*, revised 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics 211, Springer, 2002.
- [12] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, 2000.
- [13] K. Conrad, *Field Automorphisms of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}_p$* , available at <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/autRandQp.pdf>.